إهـــداء

مدرسة سهيل بن عمرو القرشي م.بنين

وزارة التربية

الرياضيات

Mathematics

الصف الثامن - الجزء الأوّل

حل الكتاب .. حل الكتاب .. حل الكتاب .. حل الكتاب

لجنة تعديل كتاب الرياضيات للصف الثامن

أ. ايمان يوسف محمد المنصور (رئيسًا)

أ. غـادة عبد الرحمن سليمان زامل

أ. جمـال عبد الناصر أحمـد السبال

أ. سـمـير عـبـدالله أحمـد مـرسي

أ. مخـلـد سـعـد مطلق المـطـيري

أ. عبد الكريم غدير مربد الشمري

أ. مريم عفّاس سعود الشحومي

أ. أمينة عبدالله عبد الرزاق البلوشي

أ. غنيمة يوسف عبد الكريم الكندري

الطبعة الرابعة

١٤٣٩ - ١٤٤٠ هـ

٢٠١٨ - ٢٠١٩ م

حل الكتاب

أ. أحمد الحسيني

حقوق التأليف والطبع والنشر محفوظة لوزارة التربية - قطاع البحوث التربوية والمناهج

إدارة تطوير المناهج

رئيس القسم

أ. ضيدان العجمي

الموجه الفني

أ. فهيد العجمي

مدير المدرسة

أ. سعد العويهان

بسم الله الرحمن الرحيم
والصلاة والسلام على أشرف المرسلين
سيدنا محمد النبي الأمين
الحمد لله رب العالمين الذي هدانا الى هذا وما كنا مهتدين

في البداية أحب أن أؤكد أن هذا الحل كان بمجهود شخصي

للأستاذ/ **أحمد الحسيني**

وأن أي عمل قد لا يخلو من وجود أخطاء فألتمس منك العذر للسهو والخطأ

وهذا الحل لم يتم مراجعته من قبل أي من الزملاء أو الموجهين

أتمنى من الله أن يساعدكم هذا الحل في عملكم
ويوفق أبناءنا الطلاب إلى ما فيه الخير
بإذن الله ويكون عونا لأولياء الأمور الذين نحن أيضا منهم

يسعدني التواصل معكم وسماع آراءكم واستفساراتكم

أحمد الحسيني
@MidNight72

https://t.me/MidNightMath
https://t.me/MathDoc

الطبعة الرابعة ٢٠١٨م

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. إبراهيم حسين القطان (رئيسًا)

أ.حسين علي عبدالله أ.حصة يونس محمد علي

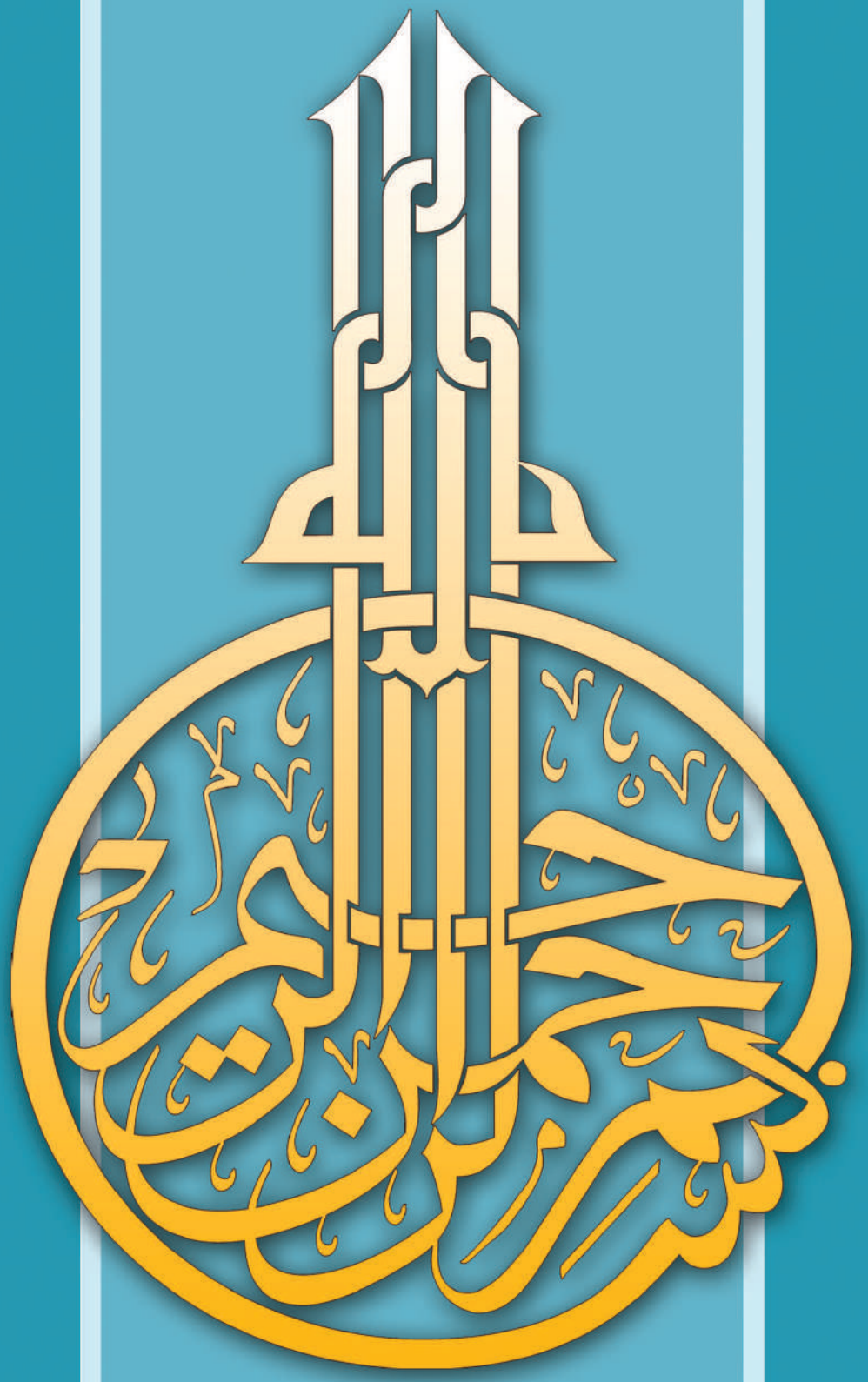
أ. فتحية محمود أبو زور

فريق عمل دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف الثامن

أ. اعتدال محمد أحمد البحر (رئيسًا)

أ.إلهام عفيفي علي أ.عادل عبدالله أبو نعمة

أ.مي أحمد الأستاذ أ.نداء محمد التحو



صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

تصـدير

لم يعد خافيًا على كلّ مهتمّ بالشأن التربوي الأهمّية القصوى للمناهج الدراسية، وذلك لأنّها ترتكز بطبيعتها على فلسفة المجتمع وتطلّعاته بالإضافة إلى أهداف النظام التعليمي والمنظومة التعليمية، لذلك نجد أنّ صناعة المنهج أصبحت من التحدّيات التي تواجه التربويين لارتباط ذلك بأسس فنّية ذات علاقة وثيقة في البنية التعليمية، مثل الأسس الفلسفية والتربوية والاجتماعية والثقافية، ومن هنا اكتسبت المناهج الدراسية أهمّيتها ومكانتها الكبرى.

ونظرًا لهذه المكانة التي احتلّتها المناهج الدراسية، قامت وزارة التربية بعملية تطوير واسعة، استكمالًا لكلّ الجهود السابقة، حيث قامت بإعداد الكتب والمناهج الدراسية وفقًا للمعايير والكفايات سواء أكانت العامّة أم الخاصّة، وذلك لتحقيق نقلة نوعية في الشكل والمضمون، ولتكون المناهج برؤيتها الجديدة ذات بعد عملي تطبيقي وظيفي يرتبط بقدرات المتعلّمين وسوق العمل ومتطلّبات المجتمع وغيرها من أبعاد المناهج التربوية، مع تأكيدنا بأنّ ذلك يأتي أيضًا اتّساقًا مع التطوّرات الحديثة، إن كانت في مجال الفكر التربوي والسلوك الإنساني أو القفزات المتسارعة في مجال التكنولوجيا، والتي أصبحت جزءًا لا يتجزّأ من حياة الإنسان، وأيضًا ما أملته التطوّرات الثقافية والحضارية المعاصِرة وانعكاساتها على الفكر ونمط العلاقات الإنسانية.

ونحن من خلال هذا الأسلوب نتطلّع إلى أن تساهم المناهج الدراسية في تحقيق أهداف دولة الكويت بشكل عامّ وأهداف النظام التعليمي بشكل خاصّ، والتي تأتي في طليعتها تنشئة أجيال مؤمنة بربّها مخلصة لوطنها تتمتّع بقدرات ومهارات عقلية ومهارية واجتماعية تجعل منهم مواطنين فاعلين ومتفاعلين، محافِظين على هويتهم الوطنية ومنفتحين على الآخر ومتقبّلينه مع احترام حقوق الإنسان وحرّياته الأساسية والتمسّك بمبادئ السلام والتسامح، والتي صارت من أهمّ متطلّبات الحياة المستقرّة الكريمة.

والله ولي التوفيق ،،،

الوكيل المساعد لقطاع البحوث التربوية والمناهج

المحتويات

الجزء الأول :

الوحدة الأولى : المجموعات

الوحدة الثانية : الأعداد النسبية

الوحدة الثالثة : النسبة والتناسب

الوحدة الرابعة : تطابق وتشابه المثلّثات

الوحدة الخامسة : العلاقة والتطبيق

الوحدة السادسة : علم الإحصاء

الجزء الثاني :

الوحدة السابعة : التحويلات الهندسية

الوحدة الثامنة : الأشكال الرباعية

الوحدة التاسعة : المقادير الجبرية

الوحدة العاشرة : تحليل المقادير الجبرية

الوحدة الحادية عشرة : الهندسة والقياس

الوحدة الثانية عشرة : الاحتمال

محتوى الجزء الأوّل

الوحدة الأولى : المجموعات

الموضوع : عالم الرياضة

مشروع الوحدة الأولى ١٨

مخطَّط تنظيمي للوحدة الأولى ١٩

١-١ الحسّ العددي والهندسة (مراجعة) ٢٠

١-٢ المجموعات ٢٤

١-٣ المجموعة الجزئية - تساوي مجموعتين ٣٠

١-٤ العمليات على المجموعات (تقاطع - اتحاد) ٣٤

١-٥ مراجعة الوحدة الأولى ٤٠

إختبار الوحدة الأولى ٤١

الوحدة الثانية : الأعداد النسبية
الموضوع : صناعات ومعادن

مشروع الوحدة الثانية ٤٢

مخطَّط تنظيمي للوحدة الثانية ٤٣

٢-١ اِستكشاف الأعداد النسبية وتبسيطها ٤٤

٢-٢ مقارنة وترتيب الأعداد النسبية ٤٨

٢-٣ جمع الأعداد النسبية ٥٢

٢-٤ طرح الأعداد النسبية ٥٨

٢-٥ ضرب الأعداد النسبية ٦٢

٢-٦ قسمة الأعداد النسبية ٦٨

٢-٧ الجذر التربيعي للعدد النسبي ٧٢

٢-٨ الجذر التكعيبي للعدد النسبي ٧٦

٢-٩ مراجعة الوحدة الثانية ٨٠

اِختبار الوحدة الثانية ٨٢

الوحدة الثالثة : النسبة والتناسب
الموضوع : المشروعات الصغيرة

مشروع الوحدة الثالثة ٨٤

مخطَّط تنظيمي للوحدة الثالثة ٨٥

٣-١ حلّ التناسب (طردي - عكسي) ٨٦

٣-٢ إيجاد النسبة المئوية من عدد ٩٢

٣-٣ اِستخدام المعادلات لحلّ مسائل تتضمّن نسبًا مئوية ٩٦

٣-٤ النسبة المئوية التزايدية والنسبة المئوية التناقصية ١٠٠

٣-٥ مراجعة الوحدة الثالثة ١٠٦

اِختبار الوحدة الثالثة ١٠٨

الوحدة الرابعة : تطابق وتشابه المثلّثات
الموضوع : الفنون الجميلة

مشروع الوحدة الرابعة ١١٠

مخطَّط تنظيمي للوحدة الرابعة ١١١

الوحدة الرابعة (أ) : التطابق

٤-١ التطابق ١١٢

٤-٢ الحالة الأولى : تطابق مثلّثين بثلاثة أضلاع ١١٦

٤-٣ الحالة الثانية : تطابق مثلّثين بضلعين والزاوية المحدَّدة بهما ١٢٠

٤-٤ الحالة الثالثة : تطابق مثلّثين بزاويتين وضلع واصل بين رأسيهما ١٢٤

٤-٥ تطبيقات على تطابق المثلّثات ١٢٨

٤-٦ تطابق مثلّثين قائمي الزاوية بضلع ووتر ١٣٢

الوحدة الرابعة (ب) : التشابه

٤-٧ تشابه المثلّثات ١٣٨

٤-٨ تشابه مثلّثين بتطابق زاويتين ١٤٢

٤-٩ تشابه مثلّثين بتناسب أطوال الأضلاع المتناظرة ١٤٦

٤-١٠ تشابه مثلّثين بتطابق زاوية وتناسب طولي الضلعين
المحددين لها ١٥٠

٤-١١ تطبيقات على تشابه المثلّثات ١٥٤

٤-١٢ مراجعة الوحدة الرابعة ١٥٨

إختبار الوحدة الرابعة ١٦٠

الوحدة الخامسة : العلاقة والتطبيق
الموضوع : عائلتي

مشروع الوحدة الخامسة ١٦٢

مخطَّط تنظيمي للوحدة الخامسة ١٦٣

٥-١ الزوج المرتَّب والحاصل الديكارتي ١٦٤

٥-٢ مفهوم العلاقة ١٦٨

٥-٣ التطبيق (الدالّة) ١٧٦

٥-٥ مراجعة الوحدة الخامسة ١٨٢

اِختبار الوحدة الخامسة ١٨٤

الوحدة السادسة : علم الإحصاء
الموضوع : السياحة

مشروع الوحدة السادسة ١٨٦

مخطَّط تنظيمي للوحدة السادسة ١٨٧

٦-١ مخطَّطات الساق والأوراق ١٨٨

٦-٢ تمثيل البيانات باستخدام القطاعات الدائرية ١٩٢

٦-٣ المتوسّط الحسابي - الوسيط - المنوال ١٩٦

٦-٤ مراجعة الوحدة السادسة ٢٠٢

إختبار الوحدة السادسة ٢٠٥

الوحدة الأولى

المجموعات
Sets

عالم الرياضة
The Sport

مشروع الوحدة :
(رياضتي المفضلة)

الرياضة هي مجهود جسدي أو مهارة تُمارَس بموجب قواعد متفق عليها بهدف (الترفيه ، المنافسة ، المتعة ، التميز ، تطوير المهارات ، تقوية الثقة بالنفس والجسد) .

خطة العمل :

- يقوم المعلم بتقسيم المتعلمين إلى عدة فرق ومن ثمّ استطلاع آرائهم حول نوعين من الرياضة المفضلة لديهم وعمل جدول بذلك.

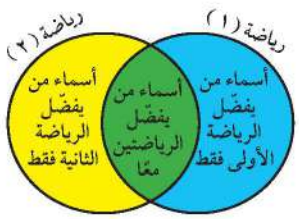
خطوات تنفيذ المشروع :

- أكمل الجدول بأسماء المتعلّمين لكل فريق والرياضة التي يفضلونها .
- حدّد عدد الطلبة الذين يفضلون نوع محدد فقط أو نوعين معًا واستكمال الجدول .

الرياضة المفضّلة / أسماء الطلاب	رياضة (١)	رياضة (٢)
١ -		
٢ -		
٣ -		
٤ -		

علاقات وتواصل :

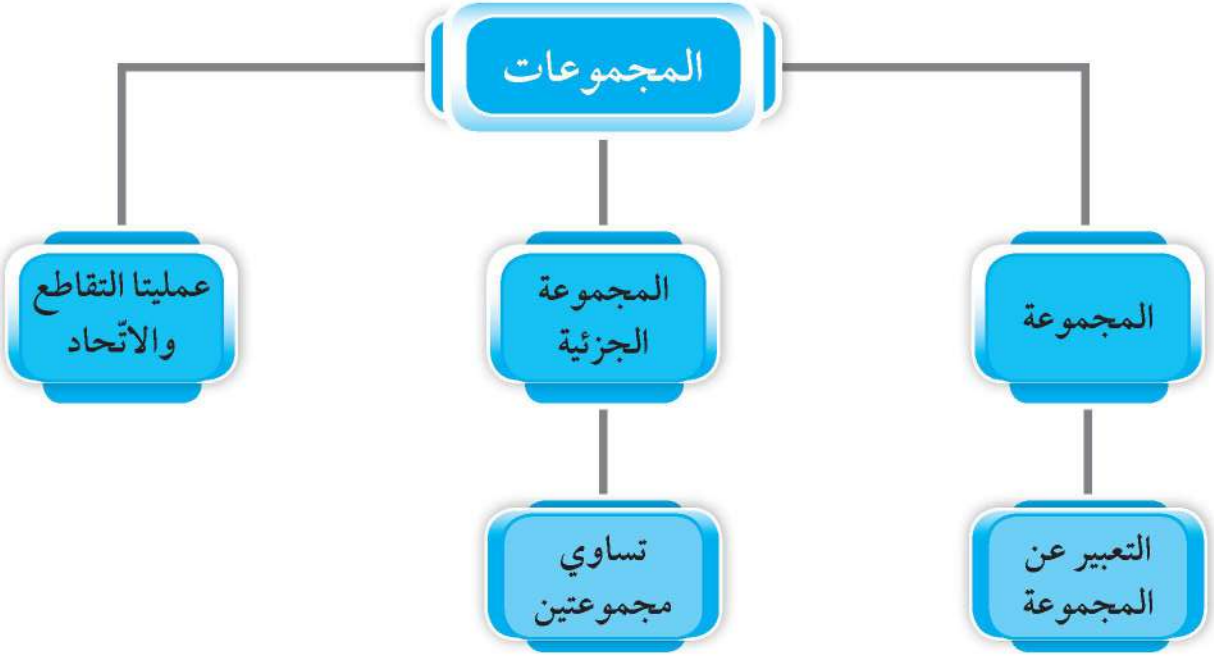
- تواجد الفرق في صالة الألعاب لممارسة الرياضة المفضلة لديهم وحسب الأسماء في الجدول أعلاه .
- تلعب الفرق الرياضية أثناء الفرص للتواصل فيما بينهم .



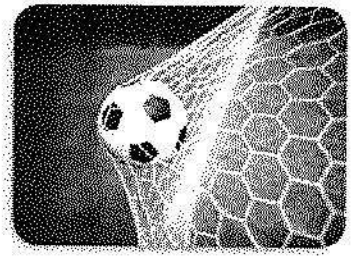
عرض العمل :

- يتم تمثيل الجدول للألعاب المحددة كما في الشكل المرسوم أمامك .
- تناقش المجموعات ما تم عمله .

مخطَّط تنظيمي للوحدة الأولى

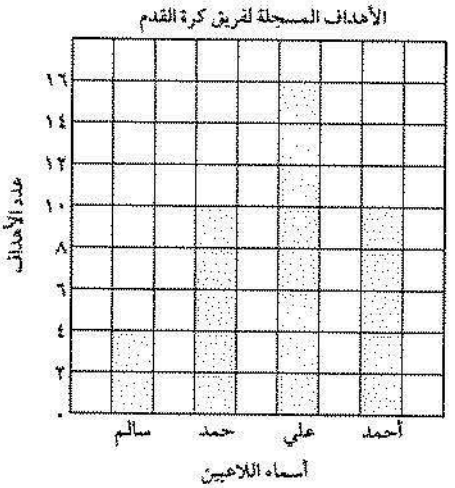


١-١ الحس العددي والهندسة (مراجعة)
Number Sense and Geometry (Revision)



أولًا : الحس العددي

١ تُعتبَر لعبة كرة القدم من أكثر الألعاب شيوعًا في دولة الكويت . التمثيل البياني التالي يمثّل عدد الأهداف التي أحرزها بعض لاعبي كرة القدم في إحدى المدارس .



أ ما نوع التمثيل البياني المقابل ؟

الأعمدة

ب اللاعب الذي أحرز أكثر عدد من الأهداف هو : علي

جـ بكم يزيد عدد الأهداف التي أحرزها علي عن عدد الأهداف التي أحرزها سالم ؟

١٢ هدف

د من التمثيل البياني السابق أوجِد :

- المتوسّط الحسابي لعدد الأهداف التي أحرزها اللاعبون = ٤ + ١٠ + ١٦ + ١٠ = ٤٠ ÷ ٤ = ١٠

- الوسيط = ١٠ - المنوال هو : ١٠ - المدى = ١٦ - ٤ = ١٢

٢ أوجد المضاعف المشترك الأدنى (م.م.أ) للعددين .

أ ٣ ، ٥ ١٥ ب ٦ ، ٩ ١٨

٣ أوجد العامل المشترك الأكبر (ع.م.أ) للعددين .

أ ٦ ، ٩ ٣ ب ١٢ ، ٨ ٤

٥ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

أ $-٧ + (-٢) =$ ..... $= -٩$

ب $-٦ - (-٣) =$ ..... $= -٣$

جـ $-٢٤ \div ٦ =$ ..... $= -٤$

د $٣ \times (-٥) =$ ..... $= -١٥$

هـ $٥,٧٣ \times ١٠٠ =$ ..... $= ٥٧٣$

و $٧٤,٩ \times ٠,١ =$ ..... $= ٧,٤٩$

ز $١٢٣٤ \div (-١٠) =$ ..... $= -١٢٣,٤$

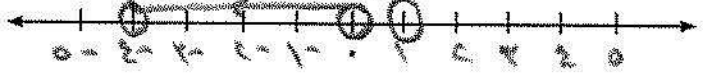
ح $|-٥| + (-٩) =$ ..... $= -٤$

ط $٣١ + ٣١ \div ٣١ =$ ..... $= ٣١ + ١ = ٣٢$

ي $٩ \times ٩ \div ٩ - ٩ =$ ..... $= ٨١ \div ٩ - ٩ = ٩ - ٩ = صفر$

٦ مثّل العبارة التالية على خطّ الأعداد ، ثمّ أوجد الناتج .

$-٤ + (+٥) =$ .....



تذكّر أنّ:
المعكوس الضربي لـ $\frac{أ}{ب}$ هو $\frac{ب}{أ}$
حيث أ، ب ≠ ٠

٧ أوجِد الناتج في أبسط صورة :

أ $٨\frac{١}{٦} - ٤\frac{١}{٢} =$ ..... $= \frac{٤٣}{٦} - \frac{٧}{٢} = \frac{٤٣}{٦} - \frac{٢١}{٦} = \frac{٢٢}{٦} = ٣\frac{٤}{٦} = ٣\frac{٢}{٣}$

ب $\frac{٧}{١٠} \div ١\frac{٢}{٥} =$ ..... $= \frac{٧}{١٠} \div \frac{٧}{٥} = \frac{٧}{١٠} \times \frac{٥}{٧} = \frac{١}{٢}$

٨ أوجِد ناتج القسمة ، ثمّ قرّب الناتج إلى أقرب جزء من عشرة .

$٣,٦٨٤ \div ٠,٤$ ..... $= ٣٦,٨٤ \div ٤ = ٩,٢١$

$= ٩,٢$

٨ أوجِد قيمة س :

$\frac{س}{١٢} = \frac{٣}{٤}$

٤ س = ٣ × ١٢

س = ٣ × ١٢ ÷ ٤ = ٩

٩ أوجِد قيمة ٢٥٪ من ١٢٠٠ متر .

$\frac{٢٥}{١٠٠} \times ١٢٠٠ = ٣٠٠$

١٠ هل العبارات التالية صحيحة أم خاطئة ؟ أُذكر السبب .

أ) ٢٥ + ٣٦ = ٣٦ + ٢٥

٦١ = ٦١ ✓

ب) ٨٣ × ٥٩ = ٥٩ × ٨٢

٤٨٣٨ ≠ ٤٨٩٧ ✗

جـ) ٣ × (٢ × ١٩) > (٣ × ٢) × ١٩

١١٤ ≯ ١١٤

✗

د) ٢٤ ÷ ١٢ = ١٢ ÷ ٢٤

٢ ≠ $\frac{١}{٢}$ ✗

هـ) ٢٤٦ ÷ ٣ = ٢٤٦ ÷ ٢

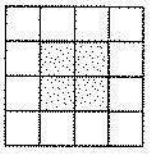
٨٢ ≠ ١٢٣ ✗

و) ١٥٨ + ١٢٠ > ١٥٨ + ٢٠٠

٢٧٨ < ٣٥٨ ✓

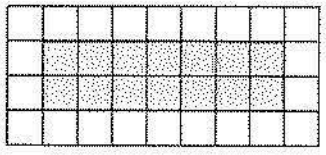
١٢ أوجِد مساحة كلّ من المناطق التالية :

أ



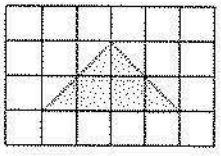
م = ٤ × ٤ = ١٦ وحدة مربعة

ب



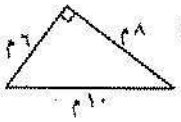
م = ٧ × ٢ = ١٤ وحدة مربعة

جـ



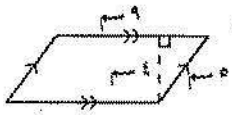
م = ½ × ٤ × ٤ = ٤ وحدة مربعة

د



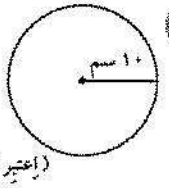
م = ½ × ٦ × ٨ = ٢٤ م²

هـ



م = ٩ × ٤ = ٣٦ سم²

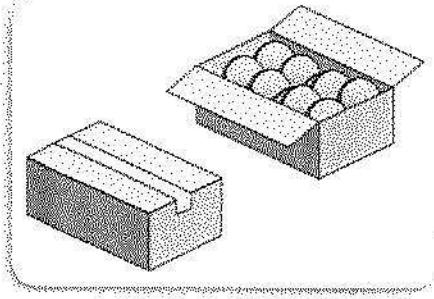
و



(اعتبر π ≈ ٣,١٤)

م = π نق² = ٣,١٤ × ١٠ × ١٠ = ٣١٤ سم²

١٣ صندوق لجمع كرات التنس في ملعب رياضي على شكل شبه مكعّب أبعاده ٥ دسم ، ٢ دسم ، ٣ دسم .
أُحسب كلًّا ممّا يلي :



أ المساحة السطحية للصندوق .

المساحة السطحية = ٢ × ٥ × ٢ + ٢ × ٥ × ٣ + ٣ × ٢ × ٢

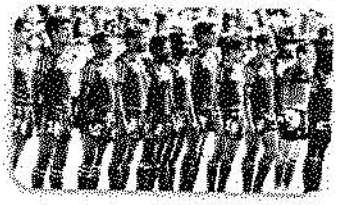
= ٢٠ + ٣٠ + ١٢ = ٦٢ دسم²

ب حجم الصندوق .

الحجم = ٥ × ٢ × ٣ = ٣٠ دسم³

١-٢ المجموعات
Sets

سوف تتعلّم : مفهوم المجموعة وعناصرها وكتابة المجموعة وتمثيلها .



نشاط (١) :

شارك المنتخب الكويتي لكرة القدم في بطولة كأس العالم عام ١٩٨٢ م ، وكان يضم المنتخب الكويتي ١١ لاعبًا أساسيًّا مميّزًا منهم : جاسم يعقوب ، فتحي كميل ، فيصل الدخيل ، ... إلخ

المنتخَب الكويتي عبارة عن تجمّع من اللاعبين ، وهذا التجمّع يُسمّى مجموعة وكلّ لاعب فيها يمثّل عنصرًا في المجموعة . فمثلاً : أرقام لاعبي المنتخب الكويتي تشكل مجموعة وكل رقم في هذه المجموعة يشكل عنصرًا .

المجموعة هي تجمّع من الأشياء المتمايزة المحدَّدة تحديدًا تامًّا ، ويُطلَق على هذه الأشياء عناصر .

فمثلًا :

أ يشكل « المتعلّمون في ثانوية المباركية » مجموعة لأنها محددة تحديدًا تامًّا ولكن لا يشكل « المتعلّمون » مجموعة لأنهم غير محددين تحديدًا تامًّا .

ب « لاعبو فريق كرة القدم بمدرسة الجهراء الثانوية » يشكّلون مجموعة ، بينما « اللاعبون » لا يشكّلون مجموعة .

أجب عن الأسئلة التالية :

أ هل « المدربون » يشكلون مجموعة أم ليست مجموعة؟ ولماذا؟

لا يشكلون مجموعة لانهم غير محددين

ب هل « المتعلمون في مدرسة ابن طفيل المتوسطة » مجموعة أم ليست مجموعة؟ ولماذا؟ مجموعة لانها محددة تحديد تام

تدرّب (١) :

حدِّد ما إذا كان كلّ ممّا يلي يمثّل مجموعة أم لا ، فسّر إجابتك .

أ الأعداد الكُلية (ط) : ٠ ، ١ ، ٢ ، ..... (مجموعة)

ب نجوم في السماء (لا)

ج المتعلمون في الصف الثامن (لا)

د مضاعفات العدد ٩ الأصغر من ٢٨ (مجموعة)

من النشاط : اذكر أمثلة عن مجموعات متعلقة بكرة القدم ؟

أ مجموعة لاعبين نادي القادسية

ب مجموعة لاعبين الناشئين بنادي القادسية

العبارات والمفردات :

مجموعة
Set

عنصر
Element

انتماء ∈
Belongs to

عدم انتماء ∉
Doesn't Belong to

مخطّط فن
Venn Diagram

المجموعة الخالية ∅
Empty Set

منتهية
Finite

غير منتهية
Infinite

ملاحظة مهمة :
سيتمّ اعتبار أنّ كلّ المضاعفات معرّفة على مجموعة الأعداد الكلّية (الطبيعية) .

تذكر أنّ :
يُرمَز إلى الأعداد الكلّية بالرمز ط ، وإلى الأعداد الصحيحة بالرمز صـ ، وإلى الأعداد الصحيحة الموجبة بالرمز صـ+ ، وإلى الأعداد الصحيحة السالبة بالرمز صـ- .

ملاحظة :

- يُرمَز إلى المجموعة بأحرف مثل سـ ، صـ ، شـ ، ... بينما يُرمَز إلى العناصر بأحرف مثل س ، ص ، ش ، ... .
- يجب كتابة جميع عناصر المجموعة داخل قوسين { } مع وضع فاصلة بين كلّ عنصر وآخر .
- يجب عدم تكرار العنصر نفسه داخل المجموعة .
- لا يشترط ترتيب كتابة العناصر داخل المجموعة .

من النشاط السابق لاحظ ما يلي :

بعد انتهاء المباراة ، غادر كلّ اللاعبين الملعب . وفي هذه الحالة ، فإنّ مجموعة اللاعبين في الملعب لا تحتوي على عناصر .

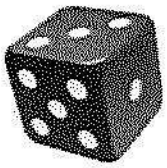
المجموعة التي لا تحتوي على عناصر تُسمّى مجموعة خالية ويُرمَز إليها بالرمز { } أو ∅ .

فمثلًا :

أ المتعلّمون الذين تقلّ أعمارهم عن ١٠ سنوات في الصفّ الثامن يشكّلون مجموعة خالية .

ب مجموعة الأعداد الصحيحة الأكبر من ٠ والأصغر من ١ تُسمّى مجموعة خالية .

تدرّب (٢) :



أيّ من المجموعات التالية تمثّل مجموعة خالية ؟

أ مجموعة الأزهار على سطح القمر (خالية)

ب مجموعة أرقام العدد ١٦٩ ٢٢٠ (لا)

ج مجموعة الأعداد الأكبر من ٦ في حجر نرد (خالية)

من النشاط السابق لاحظ ما يلي :

اللاعب فتحي كميل ينتمي إلى مجموعة لاعبي المنتخَب الوطني الكويتي ، بينما المدرِّب لا ينتمي إلى المجموعة نفسها .

فمثلًا : −٢ لا ينتمي إلى مجموعة الأعداد الكلّية ، بينما العدد ٢ ينتمي إلى مجموعة الأعداد الكلّية . لاحظ ما يلي :

المفهوم	التعريف	الرمز	مثال
الانتماء	إنتماء عنصر إلى مجموعة	$\in$	$٤ \in \{٤، ٢، ١، ٥\}$
عدم الانتماء	عدم انتماء عنصر إلى مجموعة	$\notin$	$٧ \notin \{٣، ٢، ٦، ٥\}$

تدرّب (٣) :

أكمِل كلًّا ممّا يلي بوضع الرمز المناسِب ∈ أو ∉ لتحصل على عبارات صحيحة :

١ ن [∈] {ا، ن، ج}	٢ ر [∈] مجموعة أحرف كلمة حريق
٣ ٧ [∉] {٧٧}	٤ ٨ [∉] {١، ١٨، ٤}

تذكر أنّ :
العوامل الموجبة للعدد ١٠ هي :
+١ ، +٢ ، +٥ ، +١٠ .
العوامل السالبة للعدد ١٠ هي :
-١ ، -٢ ، -٥ ، -١٠ .
عوامل العدد ١٠ هي :
±١ ، ±٢ ، ±٥ ، ±١٠ .

طرق التعبير عن المجموعة

مثال (١) :

إذا كانت س هي مجموعة العوامل الموجبة للعدد ٨ ، فعبِّر عن المجموعة س ثمّ مثِّلها .

يمكن التعبير عن المجموعة بأربع طرق كالتالي :

الطريقة الأولى : الصفة المميِّزة (لفظية) س = مجموعة العوامل الموجبة للعدد ٨

الطريقة الثانية : ذكر العناصر س = {١، ٢، ٤، ٨}

الطريقة الثالثة : الصفة المميِّزة (رمزية) س = {ا : ا ∈ صـ ، ا عامل من العوامل الموجبة للعدد ٨}

حيث صـ مجموعة الأعداد الصحيحة = {... ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ...}

الطريقة الرابعة : تمثيل المجموعة بالرسم بشكل يُسمّى مخطّط (شكل) فن

تدرّب (٤) :

أكمِل الجدول التالي :

١	الصفة المميِّزة (لفظية)	صـ = مجموعة أرقام العدد ٧٠١ ٩٧٣	مخطّط فن
	ذكر العناصر	صـ = {٠، ١، ٣، ٧، ٩}	
	الصفة المميِّزة (رمزية)	صـ = {ا : ا ∈ صـ ، ا أحد أرقام العدد ٧٠١ ٩٧٣}	
٢	الصفة المميِّزة (لفظية)	س = مجموعة العوامل الموجبة للعدد ٦	مخطّط فن
	ذكر العناصر	س = {١، ٢، ٣، ٦}	
	الصفة المميِّزة (رمزية)	س = {ا : ا ∈ هـ ، ا أحد عوامل العدد ٦}	

نشاط (٢) :

اِختلف أحمد وعبدالله في تحديد عدد عناصر المجموعتين .

س = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ } ، عدد عناصر س = ٤

ع = مجموعة الأعداد الكلّية الأكبر من أو تساوي ٦ . عدد عناصر ع = ∞

فأيّ المجموعتين يمكن حصر عدد عناصرها ؟ فسِّر إجابتك .

إذًا المجموعة المنتهية : هي المجموعة التي يمكن حصر عناصرها .

المجموعة غير المنتهية : هي المجموعة التي لا يمكن حصر عناصرها .

مثال (٢) :

حدِّد أيّ المجموعتين مجموعة منتهية وأيّها مجموعة غير منتهية .

(أ) س = مجموعة عوامل العدد ٦

س = { -١ ، -٢ ، -٣ ، -٦ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ } مجموعة منتهية (يمكن حصر عناصرها .)

(ب) ك = المضاعفات الموجبة للعدد ٦

ك = { ٦ ، ١٢ ، ١٨ ، ٢٤ ، ..... }

مجموعة غير منتهية

(جـ) ص = مجموعة الأعداد الصحيحة (لا يمكن حصر عناصرها .)

ص = { ... ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ... }

تدرّب (٥) :

أكمِل كتابة كلّ من المجموعات التالية بذكر العناصر ، ثمّ حدِّد أيًّا منها منتهية أم غير منتهية أم خالية .

(أ) ص = { ك : ك من المضاعفات الموجبة للعدد ١٠ }

ص = { ١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ... } ، ص مجموعة غير منتهية

(ب) س = { ك : ك عامل من عوامل العدد ٩ }

س = { -١ ، -٣ ، -٩ ، ١ ، ٣ ، ٩ } ، س مجموعة منتهية

(جـ) ن = { ك : ك عدد زوجي لا يقبل القسمة على ٢ } ،

ن = ∅ ، ن مجموعة خالية

تمـــرَّنْ :

١ أكمِل كلًّا ممّا يلي بوضع الرمز المناسِب ∈ أو ∉ لتصبح كلّ من العبارات التالية صحيحة :

أ ع ∈ {ع ، م ، ل}	ب ٩ ∉ {أ : أ عدد صحيح سالب}
ج ٢٣ ∉ {١ ، ٢ ، ٣}	د ق ∈ مجموعة أحرف كلمة فريق
هـ ٤ ∉ {أ : أ عامل أوّلي من عوامل العدد ٢٠}	و ٥ ∉ {٥٥٤}

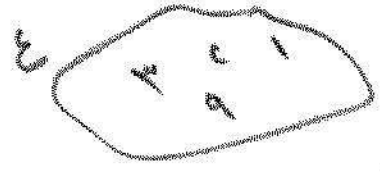
٢ عبِّر عن كلّ مجموعة ممّا يلي بذكر العناصر ومثلها بمخطط فن .

أ ك = {ب : ب حرف من أحرف كلمة سمسم}

ك = { س ، م }

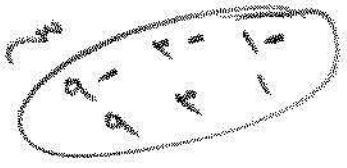
ب ع = {أرقام العدد ١٢٩ ٢٣}

ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٩ }



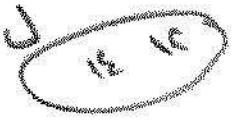
ج س = {أ : أ ∈ ص ، أ عامل من عوامل العدد ٩}

س = { ١ ، ٣ ، ٩ }



د ل = {هـ : هـ عدد زوجي أكبر من ١٠ وأصغر من ١٥}

ل = { ١٢ ، ١٤ }



هـ ن = {ب : ب ∈ ط ، ٢٣ < ب ≤ ٢٩}

ن = { ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨ ، ٢٩ }

و م = {جـ : جـ عدد كلّي أكبر من ٨ وأصغر من ٩}

م = { }

٣ عبّر عن كلّ مجموعة ممّا يلي بذكر صفة مميِّزة (بالصورة الرمزية) .

أ س = {٣، ٦، ٩، ١٢، ١٥، ...}

س = {أ : أ ∈ ط ، أ مضاعف لـ ٣}

ب ع = {٢، ١، ٠، -١، -٢، -٣، -٤، -٥}

ع = {أ : أ ∈ ص ، أ ≤ ٢}

٤ عبّر عن كلّ مجموعة ممّا يلي بذكر صفة مميِّزة (بالصورة اللفظية) ، ومثِّلها بمخطط ڤن .

أ م = {٣، ٥، ٧، ٩، ١١}

ح = {أ : أ عدد فردي أكبر من ٣ وأصغر من ١٣}

ب ن = {م ، ح ، د}

ن = {ك : ك حرف من حروف كلمة محمد}

٥ أكتب كلًّا من المجموعات التالية بذكر العناصر ، ثمّ حدِّد ما إذا كانت المجموعة منتهية أم غير منتهية أم خالية .

أ س = {ب : ب ∈ ط ، -٣ < ب ≤ ٤}

س = {-٢، -١، ٠، ١، ٢، ٣، ٤}

منتهية

ب ع = {أ : أ ∈ ط ، أ < -١}

ع = {-٢، -٣، -٤، ...}

غير منتهية

ج ل = {س : س ∈ ص ، س > ٥}

ل = {٦، ٧، ٨، ...}

غير منتهية

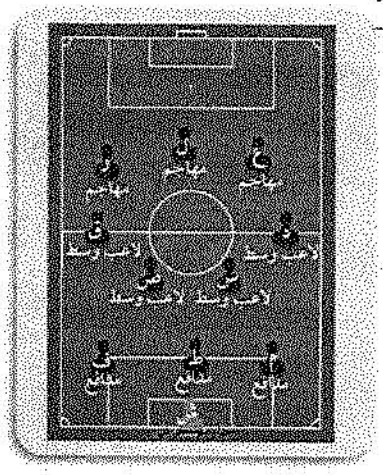
د ص = مجموعة الأعداد الصحيحة

ص = {...، -٣، -٢، -١، ٠، ١، ٢، ٣، ...}

غير منتهية

١-٣ المجموعة الجزئية – تساوي مجموعتين
Subset – Equal Set

سوف تتعلّم : المجموعة الجزئية وتساوي مجموعتين .



نشاط (١) :

يضمّ المنتخب الكويتي الوطني الحالي لكرة القدم ١١ لاعبًا موزّعين بحسب خطّة المدرّب ، وموضّحين في المخطّط المقابِل .

لتكن س = مجموعة فريق المنتخب الكويتي الوطني الحالي

١ أكمِل ما يلي مستعينًا بالمخطط المقابل :

ص هي مجموعة المدافعين = { م ، ط ، ف }

ع هي مجموعة لاعبي الوسط = { د ، ... ، ... ، ... }

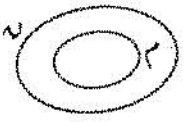
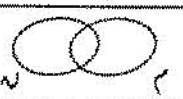
ل هي مجموعة لاعبي الهجوم = { ... ، ... ، ... }

٢ هل كلّ عنصر في ص ينتمي إلى س ؟ وضّح ذلك .

نعم

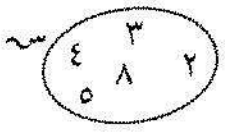
العبارات والمفردات :
مجموعة جزئية ⊆
Subset
مجموعة غير جزئية ⊈
Not subset
تساوي مجموعتين
Equal Set

لتكن م ، ن مجموعتين :

المفهوم	التعريف	الرمز	المخطط
المجموعة الجزئية (الاحتواء)	إذا كان كلّ عنصر من م ينتمي إلى ن فإن م مجموعة جزئية من ن وتقرأ (م محتواة في ن)	م ⊆ ن	
المجموعة غير الجزئية (عدم الاحتواء)	إذا وُجد عنصر من م لا ينتمي إلى ن فإن م ليست مجموعة جزئية من ن وتقرأ (م ليست محتواة في ن)	م ⊈ ن	

تدرّب (١) :

من الشكل المقابل ، ضَع الرمز المناسب ⊇ ، ⊉ لتحصل على عبارة صحيحة .



١ {٤ ، ٨} ⊇ س	ب {٣ ، ٧} ⊉ س
ج {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٨} ⊇ س	د {٥٨} ⊉ س
هـ { س : س حلّ المعادلة س + ٢ = ٥ } ⊇ س	و {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٨} ⊇ س

فكر وناقش

بالرجوع إلى تدرّب (١) يقول راشد:

١ إنّ س مجموعة جزئية (محتواة) في نفسها

ب المجموعة الخالية ∅ مجموعة جزئية (محتواة) من أي مجموعة .

هل توافقه الرأي ؟ فسّر إجابتك .

ملاحظة :

لأيّ س نجد أنّ :

(١) س ⊇ س (٢) ∅ ⊇ س

مثال :

إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، فاكتب جميع المجموعات الجزئية من س واذكر عددها :

الحلّ :

١ ∅ المجموعة الخالية (مجموعة بدون عناصر)

ب { ١ } ، { ٢ } ، { ٣ } مجموعات جزئية أحادية (ذات عنصر واحد)

ج { ١ ، ٢ } ، { ٢ ، ٣ } ، { ١ ، ٣ } مجموعات جزئية ثنائية (ذات عنصرين)

د { ١ ، ٢ ، ٣ } مجموعة جزئية ثلاثية (ذات ثلاثة عناصر)

وتساوي س

إذًا عدد المجموعات الجزئية من س = ٨

نشاط (٢) :

قام معلّم الصف بتوزيع مجموعة من الأسئلة على مجاميع المتعلّمين وكان نصيب مجموعة محمد السؤال التالي :

إذا كانت س = مجموعة أحرف كلمة "علّم"

ص = مجموعة أحرف كلمة "معلّم" ، فأكمِل ما يلي لتصبح العبارة صحيحة :

١ س = { ع ، ل ، م }

ب ص = { م ، ع ، ل ، م }

ج هل س ⊆ ص ؟ فسّر . نعم

د هل ص ⊆ س ؟ فسّر . نعم

لأن جميع عناصر س هي بعض عناصر ص

لأن جميع عناصر ص هي بعض عناصر س

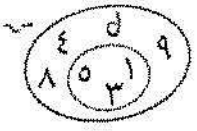
هـ ماذا تلاحظ ؟

س = ص

س = ص عندما يكون لهما العناصر نفسها ، أو بمعنى آخر عندما تكون س ⊆ ص ، ص ⊆ س .

تدرّب (٢) :

من المخطّط الموضّح أمامك ، أجِب عمّا يلي :



١ هل ل ⊆ س ؟ ولماذا ؟ نعم لأن جميع عناصر ل موجودة في س

ب هل س ⊆ ل ؟ ولماذا ؟ كلا ، لأن ٤ ∈ س ولكن ٤ ∉ ل إذًا س ⊈ ل.

ج هل س = ل ؟ ولماذا ؟ لا عدد عناصر س ≠ عدد عناصر ل

تدرّب (٣) :

أكمِل ما يلي مستخدمًا = أو ≠ لتصبح العبارة صحيحة :

١ { ٣ ، ٥ } ≠ { -٣ ، -٥ }

ب مجموعة أحرف كلمة « حبر » = مجموعة أحرف كلمة « بحر » .

ج { ١ ، ٢ ، ٣ } ≠ { ٣ ٢ ١ }

د { ٢ } ≠ مجموعة العوامل الموجَبة للعدد ٦ .

هـ مجموعة عوامل العدد ٩ = { ١ ، ٣ ، ٩ ، -١ ، -٣ ، -٩ }

و مجموعة أرقام العدد ٤٠٥٤١ = { ٠ ، ١ ، ٤ ، ٥ }

تمـــرّنْ :

١ إذا كانت س = {أ : أ ∈ ص ، أ عدد أولي أصغر من ١٠ } ،
ع = {ب : ب ∈ ط ، مضاعَفات العدد ٣ الأصغر من ١٤ }

أ أُكتب بطريقة ذكر العناصر كلًّا من س ، ع . س = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ }

ع = { ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ }

ب هل ع ⊇ س ولماذا ؟ لا

لأن ١٢ ∈ ع ، ١٢ ∉ س

جـ هل س ⊇ ع ولماذا ؟ لا

لأن ٧ ∈ س ، ٧ ∉ ع

د هل س = ع ؟ ولماذا ؟ لا

لأن س ⊈ ع ، ع ⊈ س

٢ إذا كانت ش = { ١ ، -٢ ، -٣ ، ٠ ، -١ } ، ك = {أ : أ ∈ ص ، -٤ < أ < ٤ }

أ أُكتب ك بطريقة ذكر العناصر . ك = { -٣ ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }

ب هل ك = ش ولماذا ؟ لا

لأن عدد عناصر ك ≠ عدد عناصر ش

٣ إذا كانت س = {أ : أ عدد فردي محصورة بين ١ ، ٩ } ، ص = { ٣ ، ٥ ، ٧ }

أ أُكتب س بذكر العناصر . س = { ٣ ، ٥ ، ٧ }

ب هل ١ ∈ س ؟ فسّر إجابتك . لا

جـ أُذكر المجموعات الجزئية الأحادية والثنائية من س . { ٣ } ، { ٥ } ، { ٧ }

{ ٣ ، ٥ } ، { ٣ ، ٧ } ، { ٥ ، ٧ }

د هل س = ص ؟ ولماذا ؟ لا

لأن س ⊆ ص ، ص ⊇ س

٤ إذا كانت ن = { ٧ ، ٥ س ، -٣ ، ٣ } ، ع = { ٣ ، هـ + ٢ ، ١٥ ، ٧ }
وكانت ن = ع ، فأوجِد قيمة كلّ من س ، هـ .

٥ س = ١٥ ، س = ٣

هـ + ٢ = ٥ ، هـ = ٣

٤-١ العمليات على المجموعات (تقاطع - واتحاد)
Operation in Sets (Intersection – Union)

سوف تتعلّم : إيجاد عناصر المجموعة الناتجة من تقاطع أو اتّحاد مجموعتين .

نشاط :

من أحد فصول الصف الثامن تم تشكيل فريق كرة القدم والمكون من ٧ لاعبين يمثلون المجموعة س~ ويرمز كل منهم بأحد الرموز (أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و ، ز) وأيضًا تم تشكيل فريق كرة السلة والمكون من ٥ لاعبين يمثلون ص~ ويرمز كل منهم بأحد الرموز (ل ، م ، ب ، د ، هـ)

العبارات والمفردات :
التقاطع ∩
Intersection
الاتحاد ∪
Union

أجب عن الأسئلة الآتية:

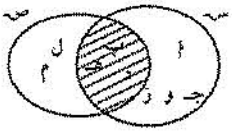
١ اكتب المجموعتين س~ ، ص~ بذكر عناصرها

س~ = { أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و ، ز }

ص~ = { ل ، م ، ب ، د ، هـ }

٢ اكتب المجموعة التي تعبر عن اللاعبين المشاركين في الفريقين معًا

وهم { ب ، د ، هـ }



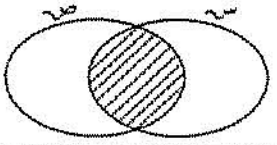
٣ مثّل كلًا من س~، ص~ من شكل فن المقابل.

٤ ظلل المنطقة التي تمثل اللاعبين المشاركين من الفريقين معًا.

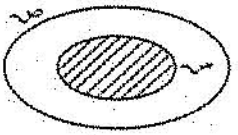
المنطقة الناتجة من تقاطع المجموعتين س، ص والتي تضم اللاعبين المشاركين من الفريقين معًا تسمى مجموعة التقاطع.

مجموعة التقاطع بين س~ ، ص~ : هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى س~ وتنتمي إلى ص~ أي تنتمي إلى (المجموعتين معًا) .

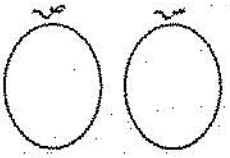
هذه المجموعة تُسمّى :

اِسم المجموعة	تُكتَب	تُقرَأ	المخطط
مجموعة التقاطع بين س ، ص	س ∩ ص	س تقاطع ص	

الحالات الخاصّة لتقاطع مجموعتين :

❶ 

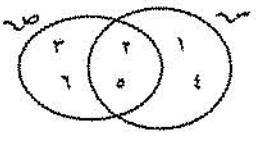
س ⊂ ص ⇐ س ∩ ص = س

❷ 

س ∩ ص = ∅

تدرّب (١) :

أكمِل ، ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل مجموعة التقاطع في كلّ ممّا يلي إن أمكن ذلك .



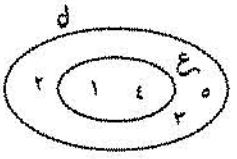
س = {١ ، ② ، ٤ ، ⑤}

ص = {② ، ٣ ، ⑤ ، ٦}

س ∩ ص = {٢ ، ٥}

ص ∩ س = {٢ ، ٥}

إذًا س ∩ ص = ص ∩ س



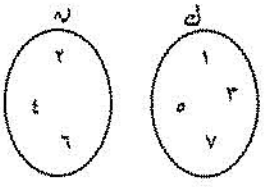
ع = {١ ، ٤}

د = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

ع ∩ د = {١ ، ٤}

ماذا تلاحظ ؟

ع ∩ د = ع



ك = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧}

ن = {٢ ، ٤ ، ٦}

ك ∩ ن = ∅

تدرّب (٢) :

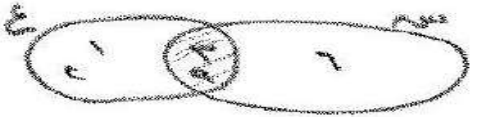
لتكن س = مجموعة المضاعَفات الموجبة للعدد ٣ الأصغر من ١٠ ، ع = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٩}

❶ أوجد بذكر العناصر كلًّا من :

س = {٣ ، ٦ ، ٩} ، س ∩ ع = {٣ ، ٩}

ع ∩ س = {٣ ، ٩} ، ماذا تلاحظ ؟ ع ⊂ س ⇐ س ∩ ع = ع

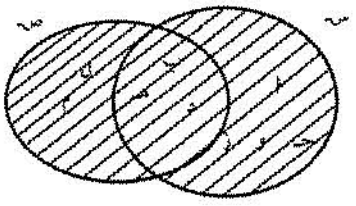
❷ مثّل كلًّا من س ، ع بمخطّط فن ، ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل س ∩ ع .



فكر وناقش

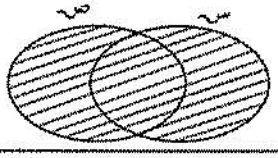
بيِّن صحّة أو خطأ العبارة التالية مع التفسير لأي مجموعتين س~ ، ص~
إذا كانت أ ∋ (س~ ∩ ص~) فإنّ أ ∋ ص~

بالرجوع إلى النشاط السابق ، ظلل المنطقة التي تمثّل مجموعة المتعلّمين الذين يمارسون رياضة كرة القدم أو رياضة كرة السلّة أو الرياضتين معًا .

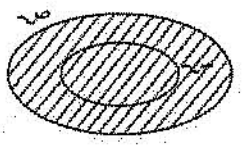


مجموعة الاتّحاد:
س~ إتحاد ص~ : هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى س~ أو ص~ أو كليهما معًا .

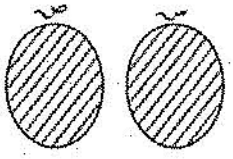
هذه المجموعة تُسمّى :

اِسم المجموعة	تُكتب	تُقرأ	المخطط
مجموعة الاتّحاد بين س~ ، ص~	س~ ∪ ص~	س~ اتّحاد ص~	

الحالات الخاصّة لاتّحاد مجموعتين :

١ 

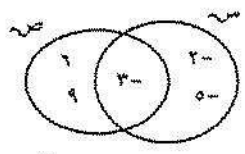
ص~ ⊃ س~ ⇐ س~ ∪ ص~ = ص~

٢ 

س~ ∪ ص~
حيث س~ ∩ ص~ = ∅

تدرّب (٣) :

أكمِل ما يلي ، ثمّ ظلّل المنطقة التي تمثّل مجموعة الاتّحاد .



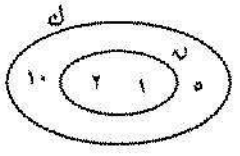
سـ = { ٢ ، ٣ ، ٥ }

صـ = { ٣ ، ٦ ، ٩ }

سـ ∪ صـ = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٩ }

صـ ∪ سـ = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٩ }

ماذا تلاحظ ؟ سـ ∪ صـ = صـ ∪ سـ

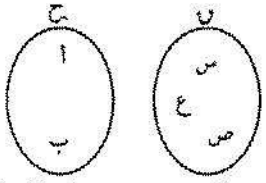


ن = { ١ ، ٢ ، ٥ }

ك = { ١ ، ٢ ، ٥ ، ٧ ، ١٠ }

ن ∪ ك = { ١ ، ٢ ، ٥ ، ٧ ، ١٠ }

ماذا تلاحظ ؟ ن ∪ ك = ك



ن = { س ، ص ، ع }

ح = { ا ، ب }

ن ∪ ح = { س ، ص ، ع ، ا ، ب }

تدرّب (٤) :

إذا كانت سـ = { ا : ا ∈ ط ، ا عدد فردي أصغر من ١٠ } حيث ط هي مجموعة الأعداد الكلّية ، صـ = مجموعة الأعداد الأوّلية الأصغر من ١٠ ،

فأوجِد بذكر العناصر كلًّا من :

سـ ، صـ ، سـ ∩ صـ ، سـ ∪ صـ ، ثمّ مثّل المجموعتين بشكل فن وظلّل منطقة التقاطع .

سـ = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ }

صـ = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ }

سـ ∩ صـ = { ٣ ، ٥ ، ٧ }

سـ ∪ صـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ }

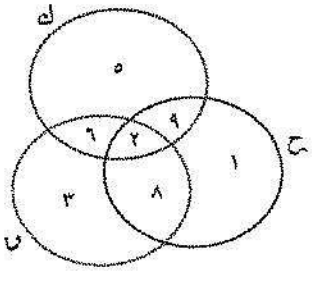
فكّر وناقش

بيّن صحّة أو خطأ العبارة التالية مع التفسير لأي مجموعتين سـ ، صـ

إذا كانت ا ∉ صـ ، فإنّ ا ∉ (سـ ∪ صـ) .

مثال :

من خلال مخطّط فن الذي أمامك ، فإنّ :



ح = { ١ ، ٢ ، ٨ ، ٩ }

ن = { ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٨ }

ك = { ٢ ، ٥ ، ٦ ، ٩ }

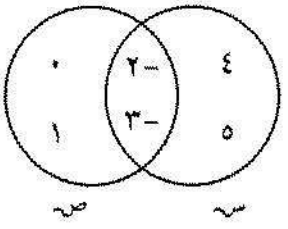
ح ∩ ن ∩ ك = { ٢ }

ح ∪ ن ∪ ك = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٨ ، ٩ }

تمـــرِّنْ :

١ أكمل ما يلي ، ثمّ ظلّل ما يمثّل مجموعة التقاطع إن أمكن :

أ



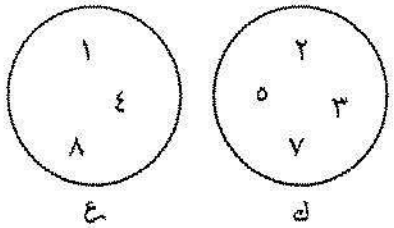
س = { -٣ ، -٢ ، ٤ ، ٥ }

ص = { -٣ ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ }

س ∩ ص = { -٣ ، -٢ }

س ∪ ص = { -٣ ، -٢ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٤ ، ٥ }

ب



ك = { ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ }

ع = { ١ ، ٤ ، ٨ }

ك ∩ ع = ∅

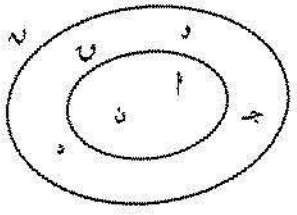
ك ∪ ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٨ }

جـ ن = { ا ، ب ، جـ ، د }

ب = { ا ، ب }

ن ∩ ب = { ا ، ب }

ن ∪ ب = ن

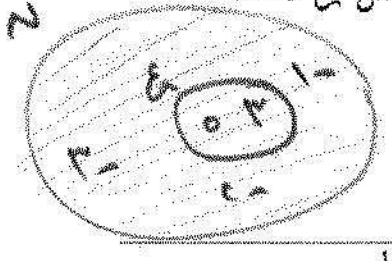


٢ إذا كانت ع = { ا : ا عامل أوّلي من عوامل العدد ١٥ } ،

ن = { ٥ ، ٣ ، -١ ، -٢ ، -٣ }

فأوجِد بذكر العناصر كلًّا من : ع ، ع ∩ ن ، ع ∪ ن ،

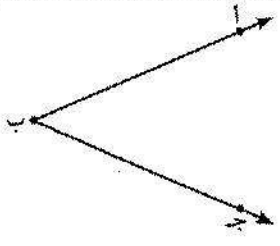
مثّل كلًّا من ع ، ن بمخطّط فن ، ثمّ ظلّل المنطقة التي تمثّل ع ∪ ن .



ع = { ٣ ، ٥ }

ع ∩ ن = { ٣ ، ٥ }

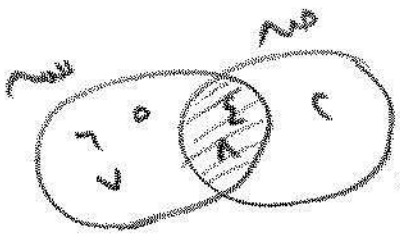
٣ في الشكل المقابِل ، أكمِل كلًّا ممّا يلي :



$\overleftarrow{بأ} \cup \overleftarrow{بجـ}$ = ∠ ا ب جـ

$\overleftarrow{بأ} \cap \overleftarrow{بجـ}$ = $\overrightarrow{بب}$

٤ إذا كانت س = { س : س ∈ ط ، ٤ ≤ س < ٩ } ،
ص = { ص : ص عامل موجَب من عوامل العدد ٨ } ، فأوجِد بذكر العناصر كلًّا من :
س ، ص ، س ∪ ص ، س ∩ ص ، ومثِّل كلًّا من س ، ص بشكل فن ، ثمّ ظلِّل المنطقة التي تمثّل س ∩ ص .



س = { ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ }
ص = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ }
س ∪ ص = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ }
س ∩ ص = { ٤ ، ٨ }

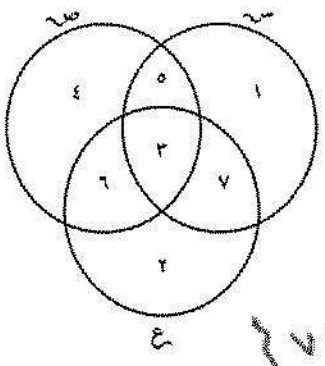
---

٥ إذا كانت س هي مجموعة أحرف كلمة "جمال" ، ص هي مجموعة أحرف كلمة "سعود" ، فاكتب كلًّا من س ، ص بذكر عناصرها ،
ثمّ أوجِد س ∩ ص ، س ∪ ص .

س = { ج ، م ، أ ، ل }
ص = { س ، ع ، و ، د }
س ∩ ص = ∅
س ∪ ص = { ج ، م ، أ ، ل ، س ، ع ، و ، د }

---

٦ من خلال مخطَّط فن الذي أمامك ، أكمِل ما يلي :



س = { ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ }
ص = { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ }
ع = { ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٧ }
س ∩ ص ∩ ع = { ٣ }
س ∪ ص ∪ ع = { ١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ }

١-٥ مراجعة الوحدة الأولى
Revision Unit One

١ إذا كانت س = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٧}، فأيّ من العبارات التالية صحيحة .

أ ١ ∈ س ✓ ب ٧ ∈ س ✓ جـ ١ ∉ س ✗

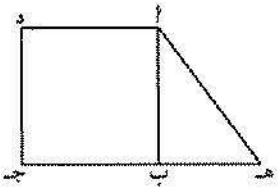
د ٥٤ ∈ س ✗ هـ {١، ٣} ⊆ س ✓ و {٧} ⊄ س ✗

٢ تأمَّلِ الشكل المقابل، وضَعِ الرمز المناسِب ∈ أو ∉ أو ⊆ أو ⊄.

أ د ∈ دجـ

ب جـ د ⊄ جـ هـ

جـ Δ اب هـ ⊆ الشكل الرباعي اهـ جـ د



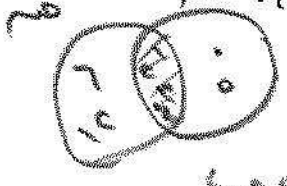
٣ إذا كانت س = مجموعة الأعداد الكلّية الأصغر من ٥ = {٠، ١، ٢، ٣، ٤}

ص = {٠، ١، ٢، ٣}، فهل س = ص ؟ فسّر إجابتك .

لا لأن عدد عناصر س ≠ عدد عناصر ص

٤ إذا كانت س = {ا : ا ∈ ط، ا < ٦} ص = {د : د عامل موجَب من عوامل العدد ١٢}،

فأوجِد س، ص، س ∩ ص، س ∪ ص بذكر العناصر ثمّ مثّل س، ص بمخطَّط فن وظلِّل س ∩ ص.



س = {١، ٢، ٣، ٤، ٥}

ص = {١، ٢، ٣، ٤، ٦، ١٢}

س ∩ ص = {١، ٢، ٣، ٤}

س ∪ ص = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ١٢}

٥ إذا كانت ع = {س : س عدد زوجي أكبر من ١ وأصغر من ٩}

ك = {٠، ٣، ٤، ٦}، م = {١، ٣، ٤، ٥، ٦}، فأوجِد كلًّا ممّا يلي :

أ ع = {٢، ٤، ٦، ٨}

ب ك ∪ ع = {٠، ٢، ٣، ٤، ٦، ٨}

جـ ع ∩ ك = {٤، ٦}

د ك ∪ ع ∪ م = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٨}

هـ ع ∩ ك ∩ م = {٤، ٦}

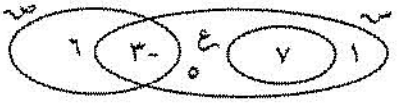
اختبار الوحدة الأولى

أوّلًا : في البنود (١-٤) ظلِّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ لأيّ مجموعتين س ، ص فإنّ س ∪ ص = ص ∪ س	(أ)	(ب)
٢ إذا كانت ٣ ∈ س ∩ ص ، فإنّ ٣ ∈ ص	(أ)	(ب)
٣ لأيّ مجموعة س يكون ∅ ⊇ س	(أ)	(ب)
٤ في الشكل المقابِل ، م ∈ المربّع أ ب جـ د	(أ)	(ب)

ثانيًا: لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة :

٥ في الشكل المقابِل العبارة الصحيحة فيما يلي هي :



(أ) ع ⊇ ص (ب) ع ∉ س (جـ) ع ⊇ (س ∪ ص) (د) ع ⊇ (س ∩ ص)

---

٦ إذا كانت س = { م ، ٢ ، ١ - ك } ، ص = { ٢ ، ٧ ، ٥ } وكان س = ص ، فإنّ ك =

(أ) -٦ (ب) ٢ (جـ) ٧ (د) -٨

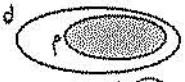
---

٧ في الشكل المقابِل ، أ ب ⊄

(أ) أ جـ (ب) ب أ (جـ) ب جـ (د) أ جـ

---

٨ في الشكل المقابِل ، المنطقة المظلّلة يمكن التعبير عنها بالصورة :



(أ) م ⊄ د (ب) م ∩ د (جـ) م ∪ د (د) د ⊇ م

---

٩ إذا كانت س = { أ : أ ∈ ط ، ٢ ≤ أ < ٦ } ، فإنّ س هي :

(أ) { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } (ب) { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } (جـ) { ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } (د) { ٢ ، ٦ }

---

١٠ إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، فإنّ المجموعة الجزئية من س هي :

(أ) ٣ (ب) { ١ ، ٢ ، ٥ } (جـ) { ١ ، ب } (د) { ١ ، ٢ }

الوحدة الثانية

الأعداد النسبية
Rational Numbers

صناعات ومعادن
Industries and Metals

مشروع الوحدة :
(التغذية السليمة)

للصناعة أهمّية كبرى في كونها تنوّع مصادر الدخل للدولة وترفع من مستوى معيشة الشعوب بما تدرّه من مال ، وما توفّره من رفاهية للإنسان بمقتنياتها المختلفة .

يقدم أحد مصانع الأغذية نوعين مختلفين من الأغذية :

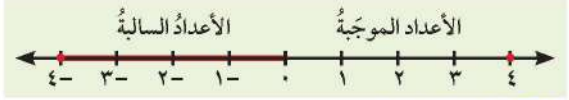
(١) أغذية تساعد على زيادة الوزن . (٢) أغذية تساعد على فقدان الوزن .

خطة العمل :

- ترتيب الأعداد (الأوزان) تصاعديًّا – تنازليًّا .
- تمثيل هذه الأعداد (الأوزان) على خط الأعداد .

خطوات تنفيذ المشروع :

- أكمل الجدول المقابل .
- رتب الأوزان المكتسبة تصاعديًّا .
- رتب الأوزان المفقودة تنازليًّا .
- مثل الأعداد التي تمثل الأوزان (المكتسبة – المفقودة) على خط الأعداد .



نتائج بعض الأشخاص بعد أسبوعين من بداية تناول الأغذية

الاسم	تعبير لفظي	العدد النسبي
فرح	فقدت كيلوجرامًا	-١
نورة	زادت ٢ كيلوجرام ونصف	$+٢\frac{١}{٢}$
سلمى		$-١\frac{١}{٤}$
محمد	فقد ٢ كيلوجرام وثلاثة أرباع	
لولوة	زادت كيلوجرامًا ونصفًا	
عبدالله	زاد ٢ كيلوجرام وربع	
فهد		$-١\frac{١}{٢}$
خالد		$-\frac{١}{٢}$
سعد	زاد ٣ أرباع كيلوجرام	

- يُعبر عن زيادة الوزن بإشارة (+)
- يُعبر عن فقدان الوزن بإشارة (–)

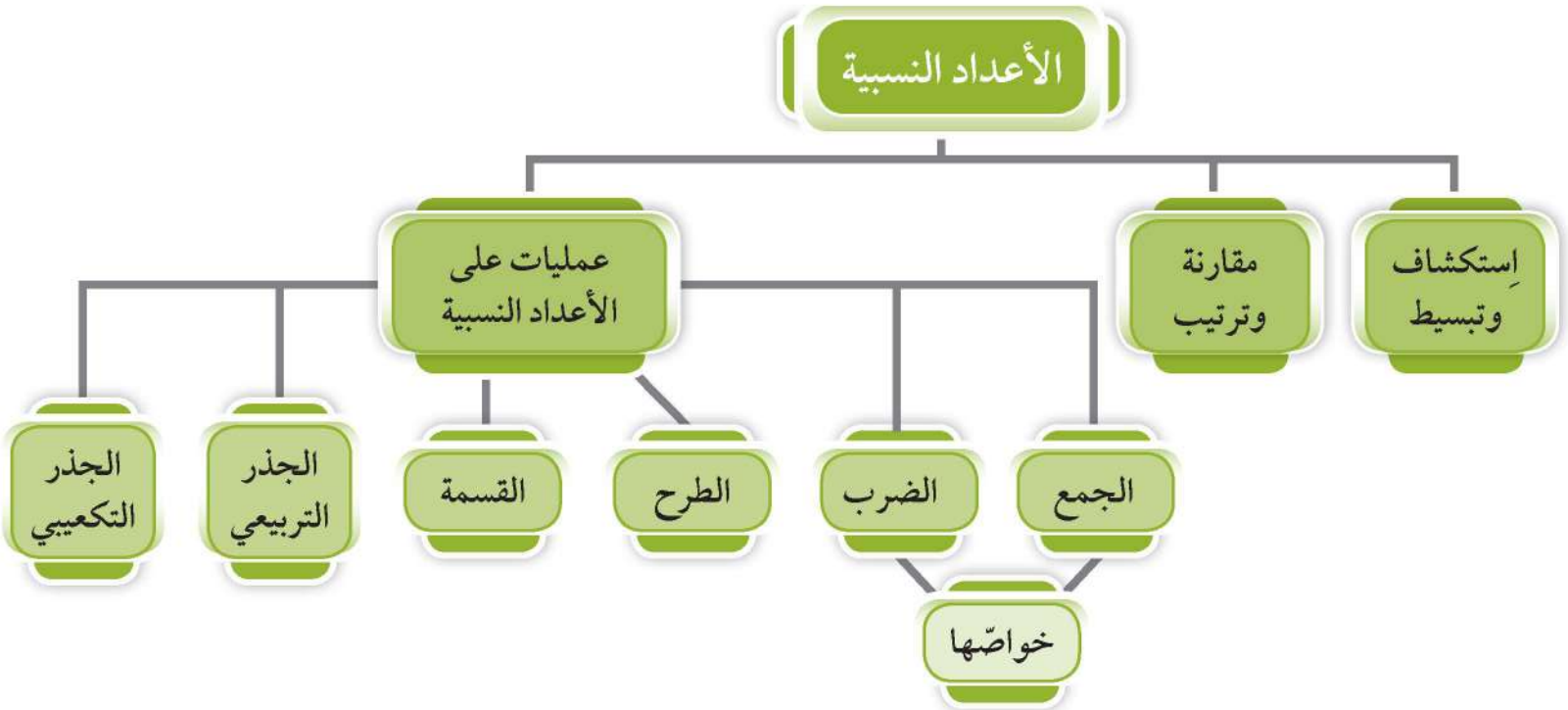
علاقات وتواصل :

- تتبادل المجموعات الجداول للتعرّف على صحة الحل ، وكذلك للتأكد من ترتيب الأوزان (تصاعديًّا – تنازليًّا) وتمثيلها على خط الأعداد .

عرض العمل :

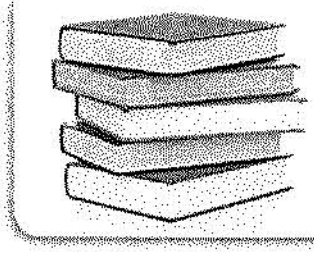
- تعرض كل مجموعة جدولها لمناقشته .
- تفسر المجموعة ترتيب الأوزان (تصاعدي – تنازلي) .
- تناقش المجموعة كيفية تمثيل الأعداد التي تمثل الأوزان على خط الأعداد .

مخطَّط تنظيمي للوحدة الثانية



١-٢ استكشاف الأعداد النسبية وتبسيطها
Exploring and Simplifying Rational Numbers

سوف تتعلّم : استكشاف الأعداد النسبية وتبسيطها .



نشاط (١) :

اشترى سمير خمس نسخ من الكتاب نفسه ليهديها لأصدقائه بمبلغ ٤ دنانير ، فما ثمن الكتاب الواحد ؟

أجب عمّا يلي :

ثمن الكتاب الواحد = $\frac{٤}{٥}$ = ٠,٨ دينار

هل ثمن الكتاب الواحد هو عدد ∈ ط ؟ لا

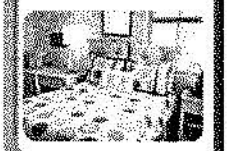
هل ثمن الكتاب عدد ∈ صـ ؟ لا

∴ الناتج هو النسبة بين ٤ ، ٥ وهو عدد على صورة $\frac{٤}{٥}$

نلاحظ ما يلي : $\frac{٤}{٥} \notin$ ط ، $\frac{٤}{٥} \notin$ صـ .

$\frac{٤}{٥} \in$ لمجموعة جديدة من الأعداد نسميها مجموعة الأعداد النسبية حيث ٤ ، ٥ ∈ صـ

معلومات مفيدة :
يستخدم صانعو الملاءات الأعداد النسبية كلّ يوم لإيجاد قياسات دقيقة وتكرار الأنماط .



مجموعة الأعداد النسبية ℚ :

هي مجموعة الأعداد التي يمكن كتابتها على صورة $\frac{أ}{ب}$ حيث أ ، ب عددان صحيحان ، ب ≠ ٠

نعبر عنها : ℚ = { $\frac{أ}{ب}$: أ ، ب ∈ صـ ، ب ≠ ٠ }

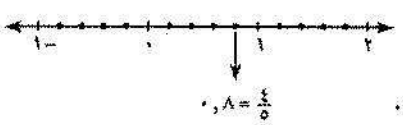
ℚ = ℚ$_+$ ∪ { ٠ } ∪ ℚ$_-$ حيث ℚ$_-$ هي مجموعة الأعداد النسبية السالبة ،

ℚ$_+$ هي مجموعة الأعداد النسبية الموجبة .

أمثلة الأعداد النسبية :

* $\frac{-٣}{٥}$ ، $\frac{٧}{١١}$ ، ٦ ، ٠ ، -٢ ، ٤ ، ٠ ، ...
* كل عدد طبيعي هو عدد نسبي لأنه يمكن وضعه على صورة $\frac{أ}{ب}$.
* كل عدد صحيح هو عدد نسبي لأنه يمكن وضعه على صورة $\frac{أ}{ب}$.

• أين يقع العدد $\frac{٤}{٥}$ على خط الأعداد ؟

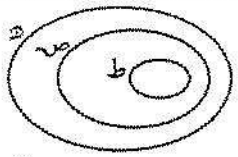


لاحظ أنّ : $\frac{٤}{٥} = \frac{٨}{١٠} = \frac{١٢}{١٥} = \ldots = ٠,٨$

كلّها كسور متكافئة وصور مختلفة لعدد نسبي واحد .

فكر وناقش

إستعن بالشكل المقابل وأعطِ أمثلة لكل من ط ، صـ على صورة $\frac{أ}{ب}$.



الأعداد النسبية

- يكون على الصورة $\frac{أ}{ب}$ ، أ ، ب ∋ صـ
  مثل : $\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٧}{٦}$ ، $\frac{١}{٢}$
- عدد عشري منته
  مثل : ٦ , ١ ، ٢ , ١ ، ٥ , ١
- عدد عشري غير منته (متكرر) أو دوري .
  مثل : $٠,\overline{٣}$ ، $٠,٥\overline{٧١}$ ، $٠,\overline{٦٦}$

الأعداد غير النسبية

- π
- $٧,\overline{٥٧}$ ، $٧,\overline{٢٧}$ ، ....
- ٣ ، ١٩٨٠٤٧٥٠٦٨٣ ...

تدرّب (١) :

ضَعْ كلًّا ممّا يلي على صورة $\frac{أ}{ب}$:

❶ ٥ — $\frac{٥}{١}$

❷ $١\frac{١}{٢}$ — $\frac{٣}{٢}$

❸ -١,٦ — $\frac{-١٦}{١٠}$

❹ $٠,\overline{٣}$ — $\frac{١}{٣}$

تدرّب (٢) :

ضَعْ ∋ أو ∌ لتحصل على عبارات صحيحة :

١٧ ∋ ط	١٧ ∋ صـ	١٧ ∋ ه
-٥ ∌ ط	-٥ ∋ صـ	-٥ ∋ ه
$\frac{-٣}{٤}$ ∌ ط	$\frac{-٣}{٤}$ ∌ صـ	$\frac{-٣}{٤}$ ∋ ه
$٠,\overline{٣}$ ∌ ط	$٠,\overline{٣}$ ∌ صـ	$٠,\overline{٣}$ ∋ ه

مثال (١) :

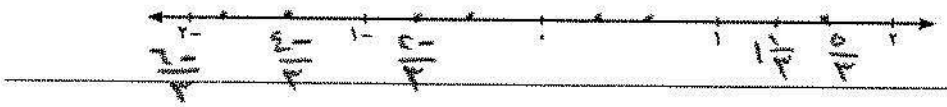
مثِّل الأعداد التالية على خطّ الأعداد .

$$١\frac{١}{٣} \ ، \ \frac{٥}{٣} \ ، \ \frac{-٢}{٣} \ ، \ \frac{-٤}{٣} \ ، \ \frac{-٦}{٣}$$

$$١\frac{١}{٣} \qquad -١\frac{١}{٣} \qquad -٢$$

الحلّ :

خطوة (١): نرسم خطّ الأعداد محدِّدين الصفر ووحدات متساوية .



خطوة (٢): نقسّم كلّ وحدة إلى ٣ أجزاء متساوية تمثّل مقام ٣ .

خطوة (٣): نعيِّن النقاط المطلوبة .

تدرّب (٣) :

مثِّل الأعداد التالية على خطّ الأعداد .

$$١,٢٥ \ ، \ \frac{-٣}{٤} \ ، \ ٠,٥ \ ، \ \frac{-٨}{٤} = -٢$$

$$١\frac{١}{٤} \qquad ٠,٥ = \frac{٢}{٤}$$

ملاحظة :
لإيجاد المعكوس والمطلق ، نستخدم طريقة الأعداد الصحيحة .

تدرّب (٤) :

أكمِل الجدول التالي :

العدد	-٥	صفر	٣	$\frac{-٥}{٦}$	٠,٧	-١,٤
المعكوس الجمعي	٥	صفر	-٣	$\frac{٥}{٦}$	-٠,٧	١,٤
المطلق	٥	صفر	٣	$\frac{٥}{٦}$	٠,٧	١,٤

تذكر أنّ :
- يرمز للمطلق | |
بالرمز | |.
- ومعكوس أ هو -أ .

مثال (٢) :

أكتب العدد $\frac{١٢}{-١٨}$ في أبسط صورة .

أنا سأبسط بالقسمة على ٢ ثم ٣

$\frac{٢}{٣}- = \frac{٢-}{٣} = \frac{-٦ \div ٣}{٩ \div ٣} = \frac{-١٢ \div ٢}{١٨ \div ٢} = \frac{-١٢}{١٨}$

أنا سأبسط بالقسمة على ٦

$\frac{٢}{٣}- = \frac{٢-}{٣} = \frac{-١٢ \div ٦}{١٨ \div ٦} = \frac{-١٢}{١٨}$

تذكَّرْ أنّ :

- $\frac{-أ}{ب} = \frac{أ}{-ب}$ حيث ب ≠ صفر
- $\frac{أ}{ب}- = \frac{-أ}{ب} = \frac{أ}{-ب}$
- $\frac{أ}{ب} = ٠$ ، ب ≠ صفر
- $\frac{أ}{ب}$ عدد صحيح عندما أ يقبل القسمة على ب ، ب ≠ صفر
- $\frac{ب}{أ}$ كمّية غير معرّفة

فكر وناقش

في مثال (٢) السابق ، من منهما طريقته أفضل ؟ فسّر إجابتك .

تمـــرَّنْ :

١ أيّ من الأعداد التالية نسبي ؟ وأيّها غير نسبي ؟

أ $\frac{٢٢}{٧}$ ✓	ب ١٥,١ ✓	جـ -١,٧٥ ✓	د ٧,٥٢٣٩٨... ✗
هـ $١\frac{٧}{٩}$ ✓	و $\sqrt{١١٧}$ ✗	ز $٠,\overline{١١٣}$ ✓	ح $٠,\overline{٦}$ ✓

٢ مثّل الأعداد النسبية التالية على خطّ الأعداد .

$١\frac{١}{٥}$ ، $\frac{٤}{٥}$ ، $\frac{-١}{٥}$ ، ٠,٦ ، -١,٤ ، $-١\frac{٤}{٥}$

٣ أكتب كلًّا ممّا يلي في أبسط صورة .

أ $\frac{١٢}{٢٤} = \frac{١}{٢}$	ب $\frac{-٢٥}{٤٥} = \frac{-٥}{٩}$	جـ $\frac{-١٥}{-١٢} = \frac{٥}{٤} = ١\frac{١}{٤}$
د $\frac{٨}{-٤} = -٢$	هـ ٠,١٤ $= \frac{١٤}{١٠٠} = \frac{٧}{٥٠}$	و $\frac{٢٤}{٨} = ٣$

في التمرينين (٤ ، ٥) اِختر الإجابة الصحيحة :

٤ $\frac{|-٣|}{٥} = \frac{٣}{٥}$

أ -٠,٠٦	ب ٠,٠٦	جـ -٠,٦	د ٠,٦

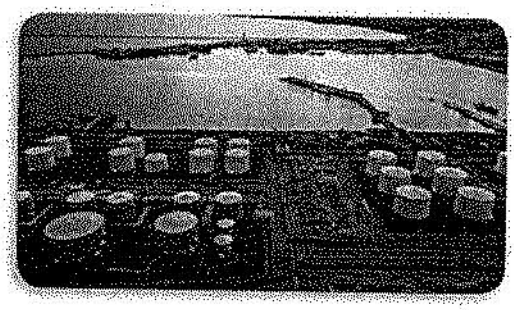
٥ العدد النسبي الدوري هو :

أ $\frac{٣}{٨}$	ب $\frac{١}{٤}$	جـ $\frac{١}{٦}$	د $\frac{٤}{٥}$

٢-٢ مقارنة وترتيب الأعداد النسبية
Comparing and Ordering Rational Numbers

سوف تتعلّم : المقارنة بين الأعداد النسبية وترتيبها .

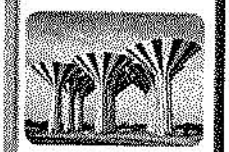
نشاط :



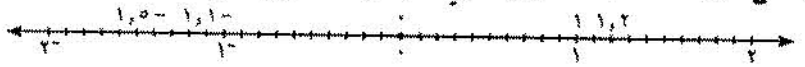
يعمل محمّد على إعداد مشروع علمي عن الماء والصناعات المتعلّقة به . وجد أنّ درجة تجمّد الماء تختلف باختلاف الارتفاع عن سطح البحر كما هو موضّح في الجدول التالي :

الارتفاع أو العمق (بالمتر)	٣٣-	٣٠٩	صفر (مستوى سطح البحر)	٣٣٦-	٣٦٠
درجة التجمّد (درجة مئوية)	١,٥-	١	صفر	١,١-	١,٢

معلومات مفيدة :
يتمّ استخدام ٢٠٪ من المياه العذبة في الصناعة عالميًا ، في حين تذهب ١٠٪ للاستخدام المنزلي والمحلّي ، بينما تذهب ٧٠٪ للاستهلاك الزراعي . وهذه النسبة تتأثّر بمدى تقدّم الدولة صناعيًا . لذلك يجب علينا المحافظة على نعمة الماء وترشيد استهلاكه لنضمن تقدّمنا صناعيًا واقتصاديًا .



١ مثّل درجات التجمّد الواردة في الجدول السابق على خطّ الأعداد .



٢ من الجدول السابق ، أكمِل ما يلي لتكون العبارة صحيحة .

أ درجة التجمّد ـ١,٥ـ مئوية هي الأصغر من بين درجات التجمّد .

ب درجة التجمّد ١ مئوية أصغر من درجة التجمّد ـ١,٢ـ مئوية .

جـ درجة التجمّد -١ , ١ مئوية هي أكبر من درجة التجمّد ـ١,٥ـ مئوية .

٣ رتّب درجات التجمّد السابقة تنازليًا .

١,٢ ، ١ ، صفر ، -١,١ ، -١,٥

مثال (١) :

قارِن بين العددين النسبيين $٢\frac{١}{٤}$ ، ٢,٥

الحلّ :

* الطريقة الأولى : **تحويل العدد النسبي من الصورة العشرية إلى الصورة الكسرية .**

$٢,٥ = ٢\frac{٥}{١٠} = ٢\frac{١}{٢}$

وحِّد المقامات ثم قارِن

$٢\frac{١}{٤}$ ، $٢\frac{٢}{٤}$

$٢\frac{١}{٤} < ٢\frac{٢}{٤}$

إذًا $٢\frac{١}{٤} < ٢,٥$

* الطريقة الثانية : **تحويل العدد النسبي من الصورة الكسرية إلى الصورة العشرية .**

$٢\frac{١}{٤} = ٢\frac{٢٥}{١٠٠} = ٢,٢٥$

سارِ المنزلات العشرية ثم قارِن

٢,٢٥ ، ٢,٥٠

٢,٢٥ < ٢,٥٠

إذًا $٢\frac{١}{٤} < ٢,٥$

تذكَّرْ أنّ :

- $\frac{١}{٤} = ٠,٢٥$
- $\frac{١}{٢} = ٠,٥$
- $\frac{٣}{٤} = ٠,٧٥$
- $\frac{١}{٥} = ٠,٢$
- $\frac{١}{٨} = ٠,١٢٥$

تدرّب (١) :

ضَعْ > أو < أو = لتصبح العبارة صحيحة :

١ $\frac{٣}{٤}$ (>) $\frac{٢}{٥}$	هـ $٢\frac{١}{٤}$ (<) ٢,٥
و -٠,٠٦ (>) $\frac{-٢}{٥٠}$ = -٠,٠٤	ز $\frac{٢}{٣}$ (<) ٠,٥
ح -٥,٠٠٩ (>) -٠,٠٠١	ط ٧,٣ (=) $٧\frac{١}{٣}$
ي $\frac{١}{٣}$ (>) $\frac{١}{٢}$	ك $\frac{-١}{٣}$ (<) $\frac{-١}{٢}$
ل ٠,٦ (>) ٠,٤	م -٠,٦ (>) -٠,٤

فكر وناقش

من خلال تدرّب (١) ماذا تلاحظ ؟

- في البندين (ز ، ح) ، - في البندين (ط ، ي)

تدرّب (٢) :

❶ رتّب الأعداد التالية ترتيبًا تنازليًا :

$-٠,٢٥$ ، $٠,٥$ ، ٠ ، $-\frac{١}{٢}$ ، $١\frac{١}{٤}$

الترتيب التنازلي هو : $١\frac{١}{٤}$ ، $٠,٥$ ، ٠ ، $-٠,٢٥$ ، $-\frac{١}{٢}$

❷ رتّب الأعداد التالية ترتيبًا تصاعديًا .

٢ ، $-٠,٦$ ، صفر ، $|-\frac{٣}{٤}|$

الترتيب التصاعدي هو : $-٠,٦$ ، صفر ، $|-\frac{٣}{٤}|$ ، ٢

تدرّب (٣) :

صنع بدر مجسّمًا لمبنى يحوي عمودين ، إرتفاع العمود الأوّل ٤٢,٤ سم ، وارتفاع العمود الثاني $\frac{٣}{٥}$ ٤٢ سم . قارِن بين الارتفاعين .

٤٢,٤ = ٤٢ $\frac{٣}{٥}$ ٤٢ $\frac{٣}{٥}$ < ٤٢,٤

العمود الثاني أطول من العمود الأول

تمـــرّنْ :

❶ ضَعْ > أو < أو = لتصبح العبارة صحيحة :

❶ $-\frac{٢}{٣}$ (<) $-\frac{٢}{٥}$	❷ $-٥,٢٨$ (<) $-٥,٢$
❸ $-\frac{٣}{٥}$ (>) ٠,٥١	❹ $-٤,٠٣$ (<) -٤٣
❺ $\frac{٧}{١١}$ (>) $\frac{٧}{٢٥}$	❻ $٢\frac{٣}{٤}$ (<) $\frac{٥}{٨}$
❼ ٠,٣ (=) $\frac{١}{٣}$	❽ $-٢\frac{١}{٤}$ (>) $-٤\frac{٢}{٥}$

٢ رتِّب ما يلي ترتيبًا تصاعديًّا :

أ $-\frac{٣}{٤}$ ، $-٠,\overline{٥}$ ، $-\frac{٥}{٦}$ ، -١

$-٠,٧٥$ $-٠,\overline{٨٣}$

$-١ < -\frac{٥}{٦} < -\frac{٣}{٤} < -٠,\overline{٥}$

ب $-\frac{٧}{٩}$ ، $٠,٨$ ، ٠ ، ١ ، $-\frac{٣}{٥}$

$-٠,\overline{٧}$ $-٠,٦$

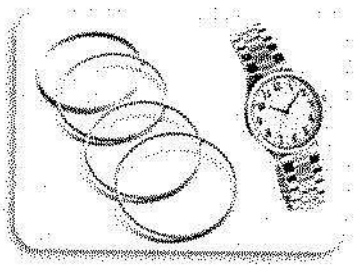
$-\frac{٧}{٩} < -\frac{٣}{٥} < ٠ < ٠,٨ < ١$

٣ رتِّب ما يلي ترتيبًا تنازليًّا .

$-٦\frac{١}{٣}$ ، $٧\frac{١}{٥}$ ، $-٩,٧$ ، $٧,٢٣$

$-٦,\overline{٣}$ $٧,٢$

$٧,٢٣ < ٧\frac{١}{٥} < -٦\frac{١}{٣} < -٩,٧$



٤ يقضي صائغ حليّ ٣,٤ ساعات لصياغة سوار من الذهب ، بينما يقضي ٣ ساعات وثلاثة أرباع الساعة لصياغة سوار من الفضّة ، أيّ نوع من الأساور يقضي الصائغ وقتًا أطول في صياغتها ؟

$٣\frac{٣}{٤} = ٣,٧٥$ الفضة

يقضي الصائغ وقتاً أطول في صياغة الفضة لأن

$٣,٤ < ٣,٧٥$

٣-٢ جمع الأعداد النسبية
Adding Rational Numbers

سوف نتعلّم : جمع الأعداد النسبية .

نشاط :

يوضّح الجدول التالي فائضًا (+) أوعجزًا (−) في الميزانية السنوية لـ ٤ شركات صناعية بآلاف الدنانير الكويتية .

الشركة	الشركة (١)	الشركة (٢)	الشركة (٣)	الشركة (٤)
السنة الأولى	+٣,٦	+٢,٣	+٤,٥	−١,٠٥
السنة الثانية	+١,٣	−٣,٤	−١,٥	−٣,٠٥

من خلال الجدول السابق ، أجب عمّا يلي :

أ) حدِّد ما إذا كانت الشركة (١) قد حقّقت فائضًا أو عجزًا خلال السنتين .

فائضاً

ب) أوجِد مجموع ما حقّقته الشركة (١) من فائض أو عجز خلال السنتين .

المجموع = (+٣,٦) + (+١,٣) = +(٣٫٦ + ١٫٣) = + ٤٫٩

إذًا المجموع = ٤٫٩ ألف دينار فائض .

جـ) حدِّد ما إذا كانت الشركة (٤) قد حقّقت فائض أو عجزًا خلال السنتين .

عجزاً

د) أوجِد مجموع ما حقّقته الشركة (٤) من فائضًا أو عجزًا خلال السنتين .

المجموع = (−١,٠٥) + (−٣,٠٥) = −(١٫٠٥ + ٣٫٠٥) = − ٤٫١

إذًا المجموع = ٤٫١ ألف دينار عجز .

ممّا سبق نلاحظ أنّ :

لأيّ عددين نسبيين ا ، ب حيث ا ، ب ∈ ص ، فإنّ :

١) (+ا) + (+ب) = + (ا + ب)

٢) (−ا) + (−ب) = − (ا + ب)

العبارات والمفردات :

خاصّية الإبدال
Commutative Property

خاصّية التجميع
Associative Property

خاصّية التوزيع
Distributive Property

معلومات مفيدة :
يقوم صانعو الحلويات بجمع الأعداد الصحيحة والكسور والكسور العشرية عندَ تحضير أنواع الحلويات المختلفة .

تذكّر أنّ :

لأيّ عددين ا ، ب ≠ صفر ،

ا ، ب ∈ ص فإنّ :

- (+ا) + (+ب) = +(ا + ب)
- (−ا) + (−ب) = −(ا + ب)

ا ، ب ∈ ص فإنّ :

- (+ا) + (−ب) = +(ا − ب) ، |ا| > |ب|
- (+ا) + (−ب) = −(ب − ا) ، |ا| < |ب|

تدرّب (١) :

أوجِد الناتج في أبسط صورة لكلّ ممّا يلي :

١ $\frac{-٣}{٧} + (\frac{-٢}{٧})$

$= -(\frac{٣}{٧} + \frac{٢}{٧})$

$= -\frac{٥}{٧}$

ب $\frac{-٣}{٨} + (-٥\frac{١}{٢})$

$= \frac{-٣}{٨} + (-٥\frac{٤}{٨})$ — وجّد المقامات

$= \frac{-(٣+٤٠)}{٨}$ — اجمع البسط واجمع الصحيح

$= -٥\frac{٧}{٨}$ — بسّط

جـ $\frac{٢}{٣} + ٠,٥$

$= \frac{٢}{٣} + \frac{٥}{١٠}$ — ضع العددين في الصورة نفسها

$= \frac{٤٠}{٣٠} + \frac{١٥}{٣٠}$ — وجّد المقامات

$= \frac{٣٥}{٣٠}$ — اجمع

د $١\frac{٣}{٨} + ٠,٧$

$= ١,٣٧٥ + ٠,٧$

$= ١,٣٧٥ + ٠,٧٠٠$

$= ٢,٠٧٥$

$\frac{٣}{٨} = \frac{٣ \times ١٢٥}{٨ \times ١٢٥} = \frac{٣٧٥}{١٠٠٠}$

فكّر وناقش

من خلال النشاط السابق ، أيّهما أكبر :

١ | ٢,٣ | أم | -٣,٤ | ؟

ب | ٤,٥ | أم | -١,٥ | ؟

ثم فسّر إجابتك .

بالرجوع إلى النشاط السابق :

أوجِد مجموع السنتين معًا للشركة (٣) كما هو موضح في الشركة (٢) :

للشركة (٢)	للشركة (٣)
المجموع = +٢,٣ + (-٣,٤)	المجموع = +٤,٥ + (-١,٥)
= $\frac{+٢٣}{١٠}$ + ($\frac{-٣٤}{١٠}$)	= $\frac{٤٥}{١٠}$ + $\frac{-١٥}{١٠}$
لاحِظ أنّ العددين في البسط صحيحان	لاحِظ أنّ العددين في البسط صحيحان
= $\frac{-(٣٤-٢٣)}{١٠}$ = $\frac{-١١}{١٠}$ = $-\frac{١١}{١٠}$	= $\frac{(٤٥-١٥)}{١٠}$ = $\frac{٣٠}{١٠}$
إذًا المجموع = -١,١	إذًا المجموع = ٣

ممّا سبق نلاحظ أنّ :

لأيّ عددين نسبيين أ ، ب ∋ ص ، فإنّ :

(+أ) + (-ب) = + (أ - ب) ، |أ| > |ب|

(+أ) + (-ب) = - (ب - أ) ، |ب| > |أ|

تدرّب (٢) ،

أوجِد الناتج في أبسط صورة :

❶ ٠,١٥ + (-٠,٥)

= ٠,١٥ + (-٠,٥٠) ساوِ المنزلات العشرية

= - (٠,٥٠ - ٠,١٥) إجمع وفق القاعدة

= -٠,٣٥

❷ $-١\frac{١}{٦} + ٣\frac{٣}{٧}$

= $-١\frac{٧}{٤٢} + ٣\frac{١٨}{٤٢}$ وحّد المقامات

= $(٣\frac{١٨}{٤٢} - ١\frac{٧}{٤٢})$ إجمع وفق القاعدة

= $٢\frac{١١}{٤٢}$

تدرّب (٣) ،

أوجِد الناتج في أبسط صورة :

❶ $(\frac{-٥}{٩}) + (\frac{-٢}{٩}) = \frac{-(٥+٢)}{٩} = \frac{-٧}{٩}$

❷ $(\frac{-٢}{٩}) + (\frac{-٥}{٩}) = \frac{-(٢+٥)}{٩} = \frac{-٧}{٩}$

ماذا تلاحظ في ❶ ، ❷ ؟

لكلّ أ ، ب ∋ ص ، فإنّ :

أ + ب = ب + أ (خاصّية الإبدال لعملية الجمع على ص)

تدرّب (٤) :

أوجِد الناتج في أبسط صورة :

❶ $٠ + \frac{٢}{٣} = \frac{٤}{٣}$ ❷ $\frac{٢}{٣} + ٠ = \frac{٤}{٣}$ ❸ $-٠,٨ + ٠ = -٠,٨$ ❹ $٠ + (-٠,٨) = -٠,٨$

ماذا تلاحظ في ❶ ، ❷ ، ❸ ، ❹ ؟

لكلّ أ ∈ ص ، فإن :

أ + ٠ = ٠ + أ = أ (خاصّية العنصر المحايد لعملية الجمع على ص)

تدرّب (٥) :

أوجِد الناتج في أبسط صورة :

❶ $\frac{٤}{٥} + (\frac{-٤}{٥}) = صفر$ ❷ $-٢,٥ + (+٢,٥) = صفر$ ❸ $٣\frac{٢}{٧} + (-٣\frac{٢}{٧}) = صفر$

ماذا تلاحظ في ❶ ، ❷ ، ❸ ؟

لكلّ أ ∈ ص ، فإنّ :

أ + (-أ) = صفر (خاصّية المعكوس الجمعي في ص)

تدرّب (٦) :

أوجِد الناتج في أبسط صورة :

❶ $\frac{-٢}{٧} + (\frac{٢}{٧} + ٣) = \frac{-٢}{٧} + \frac{٢}{٧} + ٣ = ٠ + ٣ = ٣$

❷ $(\frac{-٢}{٧} + \frac{٢}{٧}) + ٣ = صفر + ٣ = ٣$

ماذا تلاحظ في ❶ ، ❷ ؟

لكلّ أ ، ب ، جـ ∈ ص ، فإنّ :

أ + (ب + جـ) = (أ + ب) + جـ (الخاصّية التجميعية لعملية الجمع على ص)

مثال :

أُذكر اسم الخاصّية المستخدَمة لحلّ التمرين التالي :

$$١\frac{٢}{٩} + ٣\frac{٥}{٩} + (-١\frac{٢}{٩})$$

الحلّ :

$= ١\frac{٢}{٩} + (٣\frac{٥}{٩} + (-١\frac{٢}{٩}))$	الخاصّية التجميعية
$= ١\frac{٢}{٩} + (٣\frac{٥}{٩} + (-١\frac{٢}{٩}))$	الخاصّية الإبدالية
$= (١\frac{٢}{٩} + (-١\frac{٢}{٩})) + ٣\frac{٥}{٩}$	الخاصّية التجمعية
$= \text{صفر} + ٣\frac{٥}{٩}$	خاصّية المعكوس الجمعي
$= ٣\frac{٥}{٩}$	خاصّية العنصر المحايد

فكر وناقش

قال عبد الرحمن إنني أستطيع حل السؤال التالي بعدة طرق :

$$-٤,٥ + ٨\frac{١}{٢} + (-١٤\frac{٤}{٥})$$

هل توافقه الرأي ؟ اذكر إحدى هذه الطرق .

تمـــرَّنْ :

١ أوجِد الناتج وضَعْه في أبسط صورة إن أمكن .

أ $٧ + (-٥) =$ ٢ = (٧-٥)=

ب $-٩ + (-٢) =$ -١١

جـ $-١٣ + ٨ =$ -٥

د $٢٤ + ١٦ =$ ٤٠

هـ $-٣,٢ + (-٢,٥) =$ -٥,٧

و $\frac{٢}{٩} + (\frac{-٢}{٩}) =$ صفر

و) $٧,٤ + \frac{١}{٢} = ٧,٤ + ٠,٥ = ٧,٩$

ح) $٠ + (\frac{-١}{١٥}) = \frac{-١}{١٥}$

ط) $-٧\frac{٤}{٧} + (-٩\frac{٣}{٥}) = -(٧\frac{٤٠}{٣٥} + ٩\frac{٢١}{٣٥}) = -١٦\frac{٤١}{٣٥} = -١٧\frac{٦}{٣٥}$

ي) $٦\frac{٧}{٨} + (-٣,٧) = ٦,٨٧٥ + (-٣,٧٠٠) = ٣,١٧٥$

ك) $\frac{-٢}{٩} + (-٠,٣) = \frac{-٢}{٩} + \frac{-٣}{١٠} = -(\frac{٢٠}{٩٠} + \frac{٢٧}{٩٠}) = -\frac{٤٧}{٩٠}$

ل) $|-٤\frac{٧}{٨}| + (-١\frac{٥}{٨}) = ٤\frac{٧}{٨} + ١\frac{٥}{٨} = ٣\frac{٢}{٨} = ٣\frac{١}{٤}$

م) $-٢\frac{٣}{٥} + (-١٤\frac{٢}{٣}) + (-٢\frac{٣}{٥})$

$= -١٤\frac{٤}{٣}$

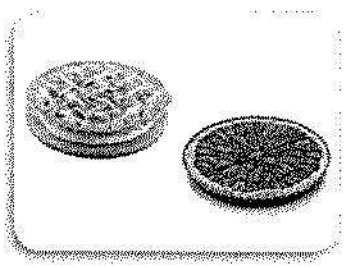
ن) $-٤,٦٢ + ٧\frac{٣}{٤} + (-١٣\frac{٤}{٥})$

$[-٤,٦٢ + (-١٣,٨٠)] + ٧,٧٥$

$= -١٨,٤٢ + ٧,٧٥$

$= -١٠,٦٧$

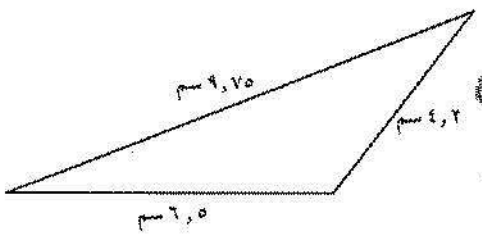
٢) تتضمّن مقادير عمل فطائر $\frac{٥}{٨}$ كيلوجرام من الجوز، $\frac{١}{٢}$ كيلوجرام من البندق، كم كيلوجرامًا من هذه المكسّرات يلزمك؟



$\frac{١}{٢} + \frac{٥}{٨} = \frac{٤}{٨} + \frac{٥}{٨} = \frac{٩}{٨}$

$= ١\frac{١}{٨}$ كيلوجرام مكسرات

٣) أ) أوجِد محيط الشكل المرسوم.



$٤,٢ + ٩,٧٥ + ٦,٥ = ٢٠,٤٥$ سم

ب) قرّب الناتج لأقرب جزء من عشرة.

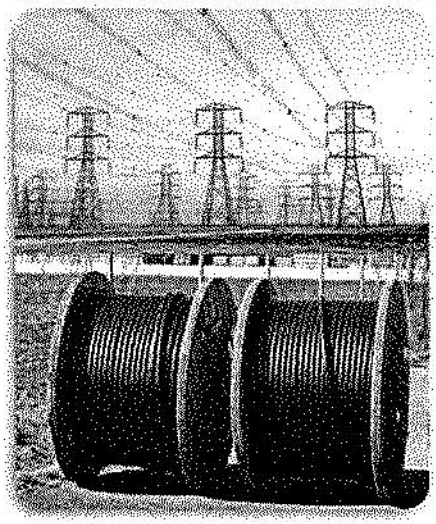
٢٠,٥ سم

٤-٢ طرح الأعداد النسبية
Subtracting Rational Numbers

العبارات والمفردات :
المعكوس الجمعي .
(النظير الجمعي)
Additive Inverse

سوف تتعلّم : طرح الأعداد النسبية .

نشاط :



في المناطق الجديدة تقوم وزارة الكهرباء والماء بتوصيل الكابلات الكهربائية للمساكن ولمنشآت أخرى . فإذا كان لدينا بكرة فيها $١٥\frac{٣}{٤}$ مترًا من الكابلات الكهربائية ونحتاج إلى $٥\frac{١}{٢}$ أمتار من الكابلات الكهربائية كتمديد لأحد المنازل ، فما هو طول الكابل الباقي ؟

لإيجاد ذلك يمكننا التواصل إلى الناتج بالطريقتين التاليتين:

معلومات مفيدة :
يوظف العمّال الذين يقومون بإصلاح شبكات الهاتف مفاهيم طرح الأعداد الصحيحة والكسور والكسور العشرية عند ضبط أعطال الشبكة لإصلاح الخطوط عقب هبوب عاصفة .

الطريقة الأولى : (الطرح)

$١٥\frac{٣}{٤} - ٥\frac{١}{٢}$ .....

$= ١٥\frac{٣}{٤} - ٥\frac{٢}{٤}$ .....

$= ١٠\frac{١}{٤}$ .....

الطريقة الثانية : (جمع النظير الجمعي)

$١٥\frac{٣}{٤} + (-٥\frac{١}{٢})$

$= ١٥\frac{٣}{٤} - ٥\frac{٢}{٤}$

$= ١٠\frac{١}{٤}$

تذكّر أنّ :
• إذا كان أ ، ب ∈ ص
فإنّ أ - ب =
أ + (- ب)
• المعكوس (النظير) الجمعي للعدد النسبي $\frac{أ}{ب}$ حيث ب ≠ صفر هو $\frac{-أ}{ب}$

ماذا تلاحظ؟ .....

ملاحظة :

• طرح الأعداد النسبية يشبه طرح الأعداد الصحيحة وطرح الكسور .

• لكلّ $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ ∈ ص . ب ، د ≠ صفر ، فإنّ :

$\frac{أ}{ب} - \frac{جـ}{د} = \frac{أ}{ب} + (-\frac{جـ}{د})$

لاحظ أنّ :
$\frac{أ}{ب} + \frac{-أ}{ب}$ = صفر

تدرّب (١) :

أوجِد الناتج في أبسط صورة .

١ $٤\frac{٥}{٨} - (-٣\frac{١}{٨})$

$= ٤\frac{٥}{٨} + ٣\frac{١}{٨}$

$= ٧\frac{٦}{٨}$

$= ٧\frac{٣}{٤}$

استبدل عملية الطرح بعملية جمع النظير الجمعي

ب $|-\frac{٣}{٥}| - (-٠,٦)$

$= ٠,٦ - \frac{٣}{٥}$

$= ٠,٦ + ٠,٦$

$= ١,٢$

جـ $٦\frac{٢}{٣} - ٢\frac{٢}{٥}$

$= (٦\frac{١٠}{١٥}) + (-٢\frac{٦}{١٥})$

$= ٩\frac{١٦}{١٥} - ٨$

$= ١\frac{١}{١٥}$

د $-٨\frac{١}{٤} - (-١٢,٩٧٥)$

ضع العددين في الصورة نفسها إمّا في الصورة العشرية أو في الصورة الاعتيادية .

$= ٨,٢٥ - (-١٢,٩٧٥)$

$= ٨,٢٥٠ + ١٢,٩٧٥$

$= ٢١,٢٢٥$

هـ $٩\frac{١}{٧} - (-٤,\overline{٣})$

$= ٩\frac{١}{٧} - (-٤\frac{١}{٣})$

$= ٩\frac{١}{٧} + ٤\frac{١}{٣}$

$= ٩\frac{٣}{٢١} + ٤\frac{٧}{٢١}$

$= ١٣\frac{١٠}{٢١}$

و $٣\frac{١}{٥} - (-٢\frac{٣}{٤} + ١\frac{١}{٤})$

$= ٣\frac{١}{٥} - (١\frac{٤}{٤})$

$= ٣\frac{١}{٥} + ١\frac{١}{٤}$

$= ٤\frac{٩}{١٠} + ١\frac{٥}{١٠} = ٤\frac{١٤}{١٠}$

تذكَّر أنّ :

$\frac{١}{٣} = ٠,\overline{٣}$

$\frac{٢}{٣} = ٠,\overline{٦}$

تدرّب (٢) :

مع عبد الرحمن ٢٨ دينارًا ، أراد أدوات منزلية بمبلغ ١٣,٢٥ دينارًا ، و أدوات صباغة بمبلغ $١٤\frac{١}{٢}$ دينارًا .فهل ما معه يكفي لشراء الأدوات المنزلية و أدوات الصباغة ؟

(وظف مفهوم التقريب لعدد كلي لاتخاذ قرارك) .

١٣,٢٥ + ١٤ ١/٢ = ١٣,٢٥ + ١٤,٥٠ = ٢٧,٧٥

٢٧,٧٥ < ٢٨,٠٠

المبلغ مع عبد الرحمن يكفي للشراء

فكر وناقش

أُكتب مسألة لفظية تتطلّب طرح عددين نسبيين مختلفي المقام ، ثمّ أوجِد الناتج .

.....

تمـــرَّنْ :

١ أوجِد الناتج وضَعْه في أبسط صورة لكلّ ممّا يلي :

أ $\frac{١٧}{٢٥} - \frac{١٧}{٢٠}$

$= \frac{٦٨}{١٠٠} - \frac{٨٥}{١٠٠} = -\left(\frac{٨٥}{١٠٠} - \frac{٦٨}{١٠٠}\right)$

$= -\frac{١٧}{١٠٠}$

ب $٤\frac{١}{٥} - ٢\frac{٤}{٧}$

$= ٤\frac{٧}{٣٥} - ٤\frac{٢٠}{٣٥} = -\left(٤\frac{٢٠}{٣٥} - ٢\frac{٤٢}{٣٥}\right)$

$= -١\frac{٢٢}{٣٥}$

جـ $-٥ - (-٣\frac{٢}{٧})$

$= -٥ + ٢\frac{٥}{٧} = -\left(٤\frac{٧}{٧} - ٢\frac{٥}{٧}\right)$

$= -١\frac{٥}{٧}$

د $٨\frac{٢}{٣} - (-٥\frac{١}{٤})$

$= ٨\frac{٨}{١٢} + ٥\frac{٣}{١٢} = ١٣\frac{١١}{١٢}$

هـ $٥\frac{٣}{٤} - ٣\frac{٢}{٢٠}$

$= ٥\frac{١٥}{٢٠} - ٣\frac{٢}{٢٠} = ٢\frac{١٣}{٢٠}$

و $٤\frac{٣}{٥} - (-٧\frac{١}{٢} + ١\frac{١}{١٠})$

$= ٤\frac{٣}{٥} + (٧\frac{١}{٢} - ١\frac{١}{١٠}) = ٤\frac{٣}{٥} + (٧\frac{٥}{١٠} - ١\frac{١}{١٠})$

$= ٤\frac{٣}{٥} + ٦\frac{٤}{١٠} = ٤\frac{٣}{٥} + ٦\frac{٤}{١٠} = ١٠\frac{٧}{١٠}$

ز $|-١,٣| - ٦,٥٧$

$= ١,٣ - ٦,٥٧ = -(٦,٥٧ - ١,٣)$

$= -٥,٢٧$

ح $-٧\frac{٧}{٨} - (-١٢,٩٥)$

$= -٧,٨٧٥ + ١٢,٦٥$

$+ (١٢,٦٥٠ - ٧,٨٧٥)$

$= ٤,٧٧٥$

ط $١٢,٦٤ - ١٤\frac{٥}{٨}$

$= ١٢,٦٤٠ - ١٤,٦٢٥$

$= -(١٤,٦٢٥ - ١٢,٦٤٠)$

$= -١,٩٨٥$

ي $-٥٧,٩ - ١٥,٣$

$= -(٥٧,٩ + ١٥,٣)$

$= -٧٣,٢$

حل آخر :

$= -٥٧\frac{٩}{١٠} - ١٥\frac{٣}{١٠}$

٢ يمارس سعود وفهد رياضة الجري يوميًا لمسافة $٦\frac{١}{٤}$ كم من منزلهما إلى الحديقة العامّة . فإذا استراحا بعد قطع مسافة ٣ , ٢ كم ، فما هي المسافة التي يجب أن يقطعاها ليصلا إلى الحديقة العامّة ؟

$٦\frac{١}{٤} - ٣,٢ = ٦,٢٥ - ٣,٢$

$= ٣,٠٥$ كم

المسافة المتبقية $= ٣,٠٥$ كم

٣ إذا كان سعر السهم لإحدى الشركات في سوق الأوراق المالية هو ٣ , ١٣٥ دينار كويتي ، ثمّ انخفضت قيمة هذا السهم إلى $١\frac{١}{٢}$ دينار كويتي ، فما هو التغيّر في سعر هذا السهم ؟

التغير في سعر السهم $= ٣,١٣٥ - ١\frac{١}{٢}$

$= ٣,١٣٥ - ١,٥٠٠ = ١,٦٣٥$ دينار

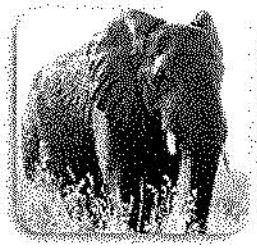
٢-٥ ضرب الأعداد النسبية
Multiplying Rational Numbers

العبارات والمفردات :
المعكوس (النظير) الضربي
Multiplicative Inverse

سوف تتعلّم : ضرب الأعداد النسبية .

نشاط :

شاهدت غنيمة فيلمًا وثائقيًّا عن أساليب البقاء لدى الحيوانات ، فعلمت أنّ الفهد الصيّاد يُعتبَر من أسرع الحيوانات الثديية حيث تصل سرعته إلى ١٢٠ كم / الساعة تقريبًا ، بينما تبلغ سرعة الفيل ثلث سرعة الفهد الصيّاد ، فما هي سرعة الفيل ؟



معلومات مفيدة :
تُعتبَر صناعة الأفلام الوثائقية واحدًا من التحدّيات في عالم الإنتاج السينمائي ، فهي تعرض العديد من جوانب الحياة بشتّى المجالات وتحمل جانبًا من المعلومات العلمية والتاريخية ، فلذلك يستخدم صنّاع الأفلام الأعداد النسبية لتركيب مشاهد الفيلم الواحد .

لإيجاد سرعة الفيل :

❶ حدِّد العملية المطلوبة . الضرب

❷ سرعة الفيل = ١٢٠ × ١/٣ = ٤٠ كم/الساعة

ملاحظة :

- إذا كان $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{د}$ ∈ ح ، ب ، د ≠ صفر ، فإنّ :

$$\frac{أ}{ب} \times \frac{جـ}{د} = \frac{أ \times جـ}{ب \times د}$$

تذكّر أنّ :
(+٢) × (+٣) = +٦
(−٢) × (−٣) = +٦
(−٢) × (+٣) = −٦
(+٢) × (−٣) = −٦

تدرّب (١) :

أوجِد ناتج :

❶ $\frac{٢}{٥} \times \frac{٣}{٧}$

$= \frac{٣ \times ٢}{٧ \times ٥}$

$= \frac{٦}{٣٥}$

❷ $\frac{٧}{٩} \times \frac{-٥}{٨}$

$= \frac{٧ \times -٥}{٩ \times ٨}$

$= \frac{-٣٥}{٧٢}$

(لاحِظ أنّ العددين في كلّ من البسط والمقام عددان صحيحان)

تدرّب (٢) :

أوجِد ناتج $-١,٢ \times ٣\frac{٣}{٤}$ بطريقتين .

* الطريقة الأولى :

$-١,٢ \times ٣\frac{٣}{٤}$

$= -١\frac{٢}{١٠} \times ٣\frac{٣}{٤}$ (ضَع العددين في الصورة نفسها)

$= -\frac{١٢}{١٠} \times \frac{١٥}{٤}$

$= -\frac{١٢^{٣} \times ١٥^{٣}}{١٠_{٥} \times ٤_{٢}}$ بسّط ثمّ اضرب .

$= -\frac{٩}{٤} = -٢\frac{١}{٤}$ ضَع العدد في أبسط صورة .

* الطريقة الثانية :

$-١,٢ \times ٣\frac{٣}{٤}$

$= -١,٢ \times ٣,٧٥$ (ضَع العددين في الصورة نفسها)

$= -٤,٥$

٣٧٥

× ١٢

٧٥٠

+ ٣٧٥٠

٤٥٠٠

تدرّب (٣) :

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي وضَعْه في أبسط صورة .

أ $\frac{-٤}{٥} \times \frac{-٣}{٨}$

$= \frac{-٤ \times -٣}{٥ \times ٨} = \frac{٣}{١٠}$

ب $\frac{-٣}{٨} \times \frac{-٤}{٥}$

$= \frac{-٣ \times -٤}{٨ \times ٥} = \frac{٣}{١٠}$

قارِن بين الإجابتين في أ و ب . ماذا تلاحظ ؟

لكلّ أ ، ب ∈ ℤ ، فإنّ :

أ × ب = ب × أ (خاصّية الإبدال في عملية الضرب على ℤ)

تدرّب (٤) :

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي وضَعْه في أبسط صورة .

❶ $\frac{٧}{٣} \times (\frac{-٥}{٧} \times \frac{١}{٥})$

$= \frac{٧}{٣} \times (\frac{-١ \times ٥}{٧ \times ٥}) = \frac{٧}{٣} \times \frac{-١}{٧}$

$= \frac{-١ \times ٧}{٣ \times ٧} = \frac{-١}{٣}$

❷ $\frac{١}{٥} \times (\frac{٧}{٣} \times \frac{-٥}{٧})$

$= \frac{١}{٥} \times (\frac{٧ \times -٥}{٣ \times ٧}) = \frac{١}{٥} \times \frac{-٥}{٣}$

$= \frac{-١ \times ٥}{٣ \times ٥} = \frac{-١}{٣}$

قارِن بين الإجابتين في ❶ و ❷ . ماذا تلاحظ ؟

لكلّ ا ، ب ، جـ ∈ ص ، فإنّ :

(ا × ب) × جـ = ا × (ب × جـ) (خاصّية التجميع لعملية الضرب على ص)

تدرّب (٥) :

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

❶ $١ \times \frac{١}{٩} = \frac{١}{٩}$

❷ $\frac{١}{٢} - ٢ \times ١ =$ ـــــــ

❸ $\frac{-٢}{٥} \times ٠ =$ صفر

❹ $\frac{١}{٤} ٣ \times ٠ =$ صفر

تذكّرْ أنّ :
- المعكوس (النظير) الضربي للعدد ا هو $\frac{١}{ا}$ ، ا ≠ صفر
حيث ا ∈ ص

ممّا سبق ماذا تلاحظ ؟

لكلّ ا ∈ ص ، فإنّ :

ا × ١ = ١ × ا = ا (خاصّية العنصر المحايد لعملية الضرب على ص)

ا × ٠ = ٠ × ا = ٠ (خاصّية الضرب في صفر لعملية الضرب على ص)

تدرّب (٦) :

أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

❶ $\frac{٢}{٩} \times \frac{٩}{٢} =$ ١

❷ $\frac{-٣}{٧} \times \frac{-٧}{٣} =$ ١

ماذا تلاحظ ؟

لكلّ أ ∈ ح ، فإنّ :

أ × $\frac{١}{أ}$ = $\frac{١}{أ}$ × أ = ١ ، أ ≠ صفر

(خاصّية المعكوس الضربي لعملية الضرب على ح)

تدرّب (٧) :

أوجِد الناتج في كلّ ممّا يلي وضَعْه في أبسط صورة .

١ $\frac{٢}{٩}$ × (١ $\frac{١}{٤}$ + ٢ $\frac{١}{٢}$)

تذكّرْ أنّ :
- أولوية إجراء ترتيب العمليات عند الحاجة.
- لكلّ
أ ، ب ، جـ ∈ ص
فإنّ :
أ × (ب + جـ) =
(أ × ب) + (أ × جـ)

• الطريقة الأولى :

$\frac{٢}{٩}$ × (١ $\frac{١}{٤}$ + ٢ $\frac{١}{٢}$)

(وحّد المقامات)

= $\frac{٢}{٩}$ × (١ $\frac{١}{٤}$ + ٢ $\frac{٢}{٤}$)

= $\frac{٢}{٩}$ × ٣ $\frac{٣}{٤}$

= $\frac{٢}{٩}$ × $\frac{١٥}{٤}$

= $\frac{٥}{٦}$

• الطريقة الثانية :

$\frac{٢}{٩}$ × (١ $\frac{١}{٤}$ + ٢ $\frac{١}{٢}$)

= ($\frac{٢}{٩}$ × ١ $\frac{١}{٤}$) + ($\frac{٢}{٩}$ × ٢ $\frac{١}{٢}$)

= ($\frac{٢}{٩}$ × $\frac{٥}{٤}$) + ($\frac{٢}{٩}$ × $\frac{٥}{٢}$)

= $\frac{١٠}{٣٦}$ + $\frac{٥}{١٨}$ = $\frac{١٠}{١٨}$ + $\frac{٥}{١٨}$

= $\frac{١٥}{١٨}$ = $\frac{٥}{٦}$

ماذا تلاحظ ؟

لكلّ أ ، ب ، جـ ∈ ح

أ × (ب + جـ) = (أ × ب) + (أ × جـ)

(الخاصّية التوزيعية لعملية الضرب على الجمع في ح)

فكر وناقش

هل عملية الضرب تتوزّع على عملية الطرح في ح ؟ فسّر إجابتك .

تمـــرّنْ :

١ أكمل الجدول التالي :

العدد	$\frac{٢}{٥}$	$\frac{٦}{١}-$	$٠,٧-$	$٠,\overline{٣}$	$٢\frac{١}{٤}-$	٣,٧٥
المعكوس الضربي للعدد	$\frac{٥}{٢}$	$\frac{١}{٧}-$	$\frac{١٠}{٧}-$	٣	$\frac{٤}{٥}-$	$\frac{٤}{١٥}$

٢ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة .

أ -٤×١٢

$= -٣٦$

ب -١٧×-١٠

$= +١٧٠$

جـ $\frac{-٣}{٥} \times (\frac{١٥}{-٩})$

$= +\frac{١٥ \times ٣}{٩ \times ٥} = ١$

د $\frac{١}{٢}٢ \times \frac{٢}{٥}$

$= \frac{٥}{٤} \times \frac{٤}{٥} = ١$

هـ $\frac{١}{٤}٢ \times (\frac{١}{٣}-١)$

$= \frac{٥}{٤} \times \frac{-٤}{٣} = \frac{-٢٠}{١٢} = -١\frac{٨}{١٢}$

و $١,٦ \times (\frac{١}{٥}-٢)$

$= \frac{١٦}{١٠} \times \frac{-١١}{٥} = -\frac{٨}{٥} \times \frac{١١}{٥} = -٣\frac{١٣}{٢٥}$

ز $١,٣ \times ٣,١$

$= ٤,٠٣$

ح $\frac{١}{٥} \times \frac{١}{٤} \times ٢\frac{٢}{٣}$

$= \frac{١}{٢٠} \times \frac{٨}{٣} = \frac{٨}{٦٠} = \frac{٤}{١٥}$

٣ أوجد ناتج كلّ ممّا يلي وضَعْه في أبسط صورة . (مستخدمًا خواص ضرب الأعداد النسبية) .

أ $\frac{٢}{٥} \times (\frac{٤}{٧} + \frac{٣}{٧})$

$(\frac{٤}{٧} \times \frac{٢}{٥}) + (\frac{٣}{٧} \times \frac{٢}{٥})$

$\frac{٨}{٣٥} + \frac{٦}{٣٥} = \frac{١٤}{٣٥}$

ب $\frac{٣}{٧} \times (٣\frac{١}{٣} + ٢\frac{١}{٢})$

$(\frac{١٠}{٣} \times \frac{٣}{٧}) + (\frac{٥}{٢} \times \frac{٣}{٧})$

$\frac{١٥}{١٤} + \frac{١٥}{١٤} = \frac{٣٠}{١٤} = ٢\frac{٢}{١٤}$

جـ $٢\frac{١}{٥} \times (١\frac{١}{٤} + \frac{٢}{٥})$

$(\frac{١١}{٥} \times \frac{٥}{٤}) + (\frac{١١}{٥} \times \frac{٢}{٥})$

$\frac{١١}{٤} + \frac{٢٢}{٢٥} = ٣\frac{١٣}{١٠٠}$

د $(٠,٩-) \times (١\frac{٢}{٣} + ٢\frac{٧}{٩}-)$

$(\frac{٩}{١٠}- \times \frac{٥}{٣}) + (\frac{٩}{١٠}- \times \frac{٢٥}{٩}-)$

$(\frac{٣}{٢}-) + (\frac{٥}{٢}-) = \frac{٨}{٢}- = ٤-$

هـ $\frac{١}{٢} \times (٣\frac{١}{٥}-) + \frac{١}{٢}- \times (٣\frac{١}{٥}-)$

$(\frac{١}{٢} \times (٣\frac{١}{٥}-)) \times (١ - ١)$

$(\frac{١}{٢} \times (٣\frac{١}{٥}-)) \times$ صفر

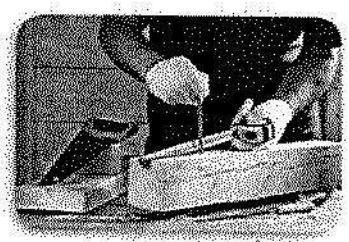
صفر =

و $\frac{١}{٥} \times (\frac{٥}{٦} - \frac{٥}{٧})$

$(\frac{٥}{٦} \times \frac{١}{٥}) - (\frac{٥}{٧} \times \frac{١}{٥})$

$\frac{١}{٦} - \frac{١}{٧} = \frac{٧}{٤٢} - \frac{٦}{٤٢} = \frac{١}{٤٢}$

٤ يبلغ طول قطعة من الخشب $٢\frac{١}{٤}$ متر ، قطع النجّار $\frac{٢}{٣}$ هذه القطعة لاستعمالها في صناعة خزانة ، فما طول قطعة الخشب الباقية ؟



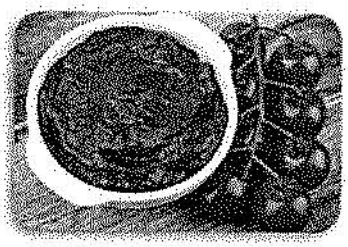
طول قطعة الخشب الباقية $= ٢\frac{١}{٤} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٩}{٤} \times \frac{٢}{٣}$

$= \frac{٣}{٢} = \frac{١}{٢} \times \frac{٩}{٤}$ م

٦-٢ قسمة الأعداد النسبية
Dividing Rational Numbers

سوف تتعلّم : قسمة الأعداد النسبية .

نشاط :



يضع أحمد وسالم $٣\frac{٣}{٤}$ لترات من الصلصة في علب سعة الواحدة $\frac{١}{٤}$ لتر .

ما عدد العلب اللازمة التي سعتها $\frac{١}{٤}$ لتر ؟

لإيجاد عدد العلب اللازمة ، اِتّبع الخطوات التالية :

❶ حدد العملية المطلوبة : القسمة

❷ عدد العلب =

$$٣\frac{٣}{٤} \div \frac{١}{٤} = \frac{١٥}{٤} \div \frac{١}{٤}$$

$$= \frac{١٥}{٤} \times \frac{٤}{١}$$

$$= \frac{١٥ \times ٤}{٤ \times ١} = \frac{١٥}{١} = ١٥$$

أكتب $٣\frac{٣}{٤}$ على شكل كسر مركّب

حوّل القسمة إلى ضرب في المعكوس الضربي للمقسوم عليه ، ثمّ اختصر .

إذًا عدد العلب اللازمة ١٥ علبة .

لقسمة عدد نسبي على آخر ، اِضرب في المعكوس الضربي للعدد الآخر واتّبع قاعدة ضرب الأعداد النسبية .

تذكّر أنّ :

$$\frac{أ}{ب} \div \frac{جـ}{د} = \frac{أ}{ب} \times \frac{د}{جـ}$$

حيث أ ، ب ، جـ ، د ∈ ص

ب ، جـ ، د ≠ صفر

تدرّب (١) :

أكمِل الجدول التالي :

العدد	$\frac{٢}{٣}$	$\frac{-٩}{٤}$	$-١\frac{٧}{١٢}$	$-٠,٩$	$٣\frac{١}{٢}$
العدد في صورة $\frac{أ}{ب}$	$\frac{٢}{٣}$	$\frac{-٩}{٤}$	$-\frac{١٩}{١٢}$	$-\frac{٩}{١٠}$	$\frac{٧}{٢}$
المعكوس الضربي	$\frac{٣}{٢}$	$-\frac{٤}{٩}$	$-\frac{١٢}{١٩}$	$-\frac{١٠}{٩}$	$\frac{٢}{٧}$

تذكّر أنّ :

المعكوس الضربي لـ $\frac{أ}{ب}$ هو $\frac{ب}{أ}$

حيث أ ، ب ≠ صفر

$$\frac{أ}{ب} \times \frac{ب}{أ} = ١$$

فكر وناقش

هل للصفر معكوس جمعي أو معكوس ضربي ؟

تدرّب (٢) :

أوجِد ناتج القسمة في أبسط صورة :

١ $٢\frac{٥}{٦} \div \frac{١}{٣} = \frac{١٧}{٦} \div \frac{١}{٣}$

$= \frac{١٧}{٦} \times \frac{٣}{١}$

$= \frac{١٧ \times ٣}{٢ \times ١}$

$= \frac{٥١}{٢} = ٢٥\frac{١}{٢}$

ب $(٣\frac{٣}{٤}-) \div ٥\frac{٥}{٨}$

$= \frac{٤٥}{٨} \div \frac{-١٥}{٤}$

$= \frac{٤٥}{٨} \times \frac{-٤}{١٥}$

$= \frac{٤٥ \times -٤}{٨ \times ١٥}$

$= \frac{-٣}{٢} = -١\frac{١}{٢}$

ج $(-٢,٨٤) \div (\frac{-٢}{٥})$ حول إلى الصورة العشرية ثم اقسم

$= (-٢,٨٤) \div (-٠,٤)$

$= ٢,٨٤ \div ٠,٤$

$= ٧,١$

د $-٧ \div (-٣\frac{١}{٢})$

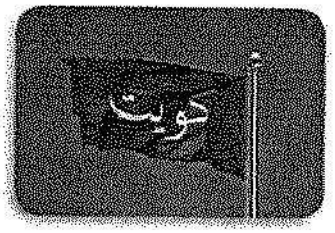
$= -٧ \div \frac{-٧}{٢}$

$= -٧ \times \frac{٢}{-٧}$

$= ٢$

تدرّب (٣) :

أرادت ندى تصميم نموذج لعلم دولة الكويت القديم. فإذا كان العلم الواحد يحتاج إلى $١\frac{١}{٤}$ متر من القماش الأحمر، فما عدد الأعلام التي يمكن صنعها باستخدام $٦\frac{١}{٤}$ أمتار من القماش نفسه؟



أ حدد العملية المطلوبة : القسمة

ب عدد الأعلام = $٦\frac{١}{٤} \div ١\frac{١}{٤} = \frac{٢٥}{٤} \div \frac{٥}{٤} = \frac{٢٥}{٤} \times \frac{٤}{٥}$

$= \frac{١٠٠}{٢٠} = ٥$ أعلام

فكر وناقش

هل ناتج قسمة كسرين اعتياديين يقع كلّ منهما بين ٠ ، ١ يكون دائمًا عددًا أكبر من واحد صحيح ؟ ناقِش صحّة العبارة موضِّحًا رأيك بأمثلة .

تمـــرَّنْ :

١ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي في أبسط صورة .

أ $\frac{٢}{٥} \div \frac{٣}{٤}$

$\frac{٢}{٥} \times \frac{٤}{٣} = \frac{٨}{١٥}$

ب $\frac{٤}{٥} \div \frac{٢}{١٥}$

$\frac{٤}{٥} \times \frac{١٥}{٢} = \frac{٦٠}{١٠} = ٦$

د) $\frac{9}{16} \div (-3)$

$\frac{9}{16} \times \frac{1}{-3} = \frac{-3}{16}$

هـ) $49 \div 6\frac{3}{10}$

$\frac{49}{1} \times \frac{10}{63} = \frac{70}{9}$

$7\frac{7}{9}$

و) $\frac{-12}{25} \div 2,8$

$\frac{12}{25} \times \frac{10}{28} = \frac{6}{36}$

ز) $8,36 \div (-0,4)$

$8,36 \div 4 = 2,09$

ح) $-7\frac{6}{7} \div (-11)$

$\frac{-55}{7} \times \frac{1}{-11} = \frac{55}{77}$

ط) $12\frac{1}{4} \div (-4\frac{2}{3})$

$\frac{49}{4} \times \frac{-3}{14} = \frac{-147}{56} = -2\frac{35}{56}$

$-2\frac{5}{8}$

١٠ يراد تفريغ $26\frac{1}{4}$ لتر من الزيت في عبوات سعة كلٍّ منهما $1\frac{3}{4}$ لتر . ما أصغر عدد من العبوات يلزم لتفريغ الزيت كله ؟

$26\frac{1}{4} \div 1\frac{3}{4} = 15$ عبوة

١١ رصدت إحدى المدارس المتوسّطة مبلغ ١٣٥ دينارًا لحفل ختام العام الدراسي . إذا ساهم كلّ مشترك بمبلغ ٤,٥ دنانير ، فما عدد الأشخاص الذين ساهموا في الحفل ؟

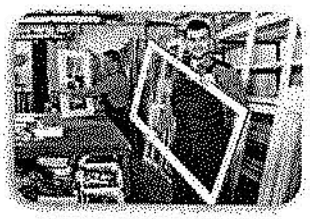
عدد الأشخاص $= 135 \div 4,5 = 30$ شخص

٢-٧ الجذر التربيعي للعدد النسبي
Square Root of Rational Numbers

سوف تتعلّم : إيجاد الجذر التربيعي لعدد نسبي موجب .

العبارات والمفردات :
مربّع العدد
Square of a Number
الجذر التربيعي
Square Root

نشاط :



ذهب عبد الكريم إلى مصنع الألومنيوم لمشاهدة بعض أعمالهم واختيار ما هو مناسب لمنزله الجديد . فاختار شبّاكًا مربعًا مساحته ٤ م^{٢} ، وشبّاكًا مربعًا آخر مساحته ٩ م^{٢} ، وبوّابة مربعة ضخمة للمدخل الرئيسي مساحتها ١٦ م^{٢} .

ساعِد عبد الكريم على معرفة طول كلّ ضلع ممّا اختاره حتّى يتمكّن من عمل اللازم عند البناء ، وذلك بإكمال الجدول .

تذكّرْ أنّ :
مساحة المنطقة المربّعة
= طول الضلع × نفسه
= ل × ل = ل^{٢}

الشكل			
مساحة منطقته	٤ م^{٢}	٩ م^{٢}	١٦ م^{٢}
المساحة بصورة أسّية	٤ م^{٢}	٣ × ٣ = ٩ = ٣^{٢}	٤ م^{٤}
طول الضلع	٢ م	٣ م	٤ م

تذكّرْ أنّ :
مربّع العدد ٢ =
(٢)^{٢} = ٢ × ٢ = ٤

تعميم :

لأيّ عدد نسبي $\frac{أ}{ب}$ يكون : مربّع العدد $\frac{أ}{ب} = (\frac{أ}{ب})^{٢} = \frac{أ}{ب} \times \frac{أ}{ب} = \frac{أ^{٢}}{ب^{٢}}$

تدرّب (١) :

أكمِل الجدول التالي :

العدد	٣	٧	٨-	٩	١٠	$-٢\frac{١}{٢}$	٠,٩	٠,٩-	$\frac{٢}{٥}$
مربّعه	٩	٤٩	٦٤	٨١	١٠٠	$٦\frac{١}{٤}$	٠,٨١	٠,٨١	$\frac{٤}{٢٥}$

ملاحظة :

مربّع أيّ عدد نسبي لا يساوي الصفر ، هو دائمًا عدد موجَب ، أ ∋ ص ، أ ≠ ٠ ، أ^{٢} > ٠

تدرب (٢) :

ضَعْ كلًّا مما يلي على صورة : $(\frac{أ}{ب})^{٢}$:

أ $\frac{٢٥}{٤٩} = \frac{(٥)^{٢}}{(٧)^{٢}} = (\frac{٥}{٧})^{٢}$

ب $٠,٦٤ = \frac{٦٤}{١٠٠} = \frac{(٨)^{٢}}{(١٠)^{٢}} = (\frac{٨}{١٠})^{٢}$

ج $٢\frac{١}{٤} = \frac{٩}{٤} = \frac{(٣)^{٢}}{(٢)^{٢}} = (\frac{٣}{٢})^{٢}$

د $١,٤٤ = \frac{١٤٤}{١٠٠} = \frac{(١٢)^{٢}}{(١٠)^{٢}} = (\frac{١٢}{١٠})^{٢}$

الجذر التربيعي للعدد النسبي الموجَب أ هو :
العدد الذي مربّعه يساوي أ ونرمز اليه بالرمز $\sqrt{أ}$.

* كل عدد نسبي موجب أ يوجد له جذران ، أحدهما موجب ($\sqrt{أ}$) والآخر سالب $-$ ($\sqrt{أ}$) (وسنقتصر دراستنا على الجذر الموجب للعدد النسبي) .
* لاحظ من تدرب (١) أن :
٠,٩ هو الجذر التربيعي الموجب للعدد ٠,٨١
$-$٠,٩ هو الجذر التربيعي السالب للعدد ٠,٨١

تدرب (٣) :

أكمِل الجدول التالي :

العدد (أ)	٤	١٦	٢٥	٣٦	١٢١	١٤٤
الجذر التربيعي الموجب ($\sqrt{أ}$)	٢	٤	٥	٦	١١	١٢
السبب	$(٢)^{٢}$ = ٢ × ٢	$٤^{٢}$ = ٤ × ٤	$٥^{٢}$ = ٥ × ٥	$٦^{٢}$ = ٦ × ٦	$(١١)^{٢}$ = ١٢١	$١٢^{٢}$ = ١٢ × ١٢

فكر وناقش

يوجَد عددان مختلفان مربَّعاهما يساويان $\frac{٦٤}{٢٥}$. ما هما ؟ تحقَّقْ من إجابتك .

تذكَّرْ أنّ :

عند تحليل العدد إلى عوامله الأوّلية نقسم على ٢ أو ٣ أو ٥ أو ٧ أو .....

حلِّل : ١٩٦ إلى عوامله الأوّلية .

١٩٦	٢
٩٨	٢
٤٩	٧
٧	٧
١	

$١٩٦ = (٢)^{٢} \times (٧)^{٢}$

تدرّب (٤) :

أوجِد كلًّا ممّا يلي :

أ $\sqrt{\frac{١٦}{٢٥}} = \sqrt{\frac{٤ \times ٤}{٥ \times ٥}} = \sqrt{\frac{(٤)^{٢}}{(٥)^{٢}}} = \sqrt{\left(\frac{٤}{٥}\right)^{٢}} = \frac{٤}{٥}$

ب $-\sqrt{٠,٨١} = -\sqrt{\frac{٨١}{١٠٠}} = -\frac{٩}{١٠} = -\sqrt{\frac{٩}{١٠}}$

ج $\sqrt{٨١٠٠} = \sqrt{٩٠ \times ٩٠} = ٩٠$

تدرّب (٥) :

أوجِد الجذر التربيعي لكلٍّ من الأعداد التالية :

أ $٥\frac{١}{١٦}$

$\sqrt{٥\frac{١}{١٦}} = \sqrt{\frac{٨١}{١٦}} = \frac{٩}{٤} = ٢\frac{١}{٤}$

ب ٣٢٤

$\sqrt{٣٢٤} = \sqrt{١٨ \times ١٨} = ١٨$

٣٢٤	٢
١٦٢	٢
٨١	٣
٢٧	٣
٩	٣
٣	٣
١	

$٣٢٤ = (٢)^{٢} \times (٣)^{٤}$

مثال :

أوجِد عددين صحيحين متتاليين يقع بينهما العدد $\sqrt{٢٣,٢٥}$.

الحلّ : نعلم أنّ :

حيث $١٦ = (٤)^{٢}$ ، $٢٥ = (٥)^{٢}$

$١٦ < ٢٣,٢٥ < ٢٥$

$\sqrt{١٦} < \sqrt{٢٣,٢٥} < \sqrt{٢٥}$

$٤ < \sqrt{٢٣,٢٥} < ٥$

إذًا العدد $\sqrt{٢٣,٢٥}$ يقع بين العددين ٤ ، ٥

فكر وناقش

أعطِ أمثلة عن جذور تربيعية أخرى تقع بين العددين ٤ ، ٥ .

تمـــرَّنْ :

(١) أوجِد كلًّا من :

أ $\sqrt{\frac{٢٢٥}{٦٤}} = \frac{١٥}{٨} = ١\frac{٧}{٨}$ ب $-\sqrt{٣\frac{٦}{٢٥}} = -\sqrt{\frac{٨١}{٢٥}} = -\frac{٩}{٥} = -١\frac{٤}{٥}$

(٢) أوجِد الجذر التربيعي لكلٍّ من الأعداد التالية :

أ ١,٩٦ ..... ١,٤ ..... ب ٢٥٦ ..... ١٦

(٣) أوجِد عددين صحيحين يقع بينهما العدد :

أ $\sqrt{٥٢}$ ..... ٧ و ٨ ..... ب $\sqrt{١٣,٥}$ ..... ٣ و ٤

في التمارين من (٤ – ٧) ظلل دائرة الإجابة الصحيحة :

(٤) $\left(\frac{-١}{٢}\right)^{٢} =$

أ $\frac{-١}{٤}$ ب $\frac{-١}{٢}$ ج $\frac{١}{٤}$ د $\frac{١}{٨}$

(٥) $\sqrt{(٣)^{٢} + (٤)^{٢}} =$

أ ٧ ب ٥ ج ٢٥ د ٤

(٦) ما العدد الذي جذره التربيعي = ٩ ؟

أ ٩ ب ٣ ج ٨١ د ٢٧

(٧) $\sqrt{١\frac{٩}{١٦}} =$

أ $١\frac{٣}{٤}$ ب $١\frac{٤}{٣}$ ج $١\frac{١}{٤}$ د $\frac{٤}{٥}$

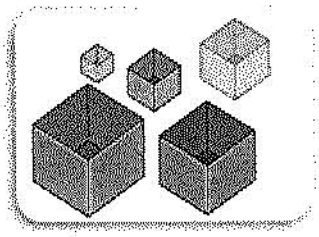
(٨) أوجِد طول ضلع المربّع الذي مساحته $١٣\frac{٤}{٩}$ سم^{٢} .

طول ضلع المربع = $\sqrt{١٣\frac{٤}{٩}} = \sqrt{\frac{١٢١}{٩}} = \frac{١١}{٣} = ٣\frac{٢}{٣}$ سم

٨-٢ الجذر التكعيبي للعدد النسبي
Cubic Roots of Rational Numbers

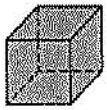
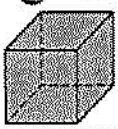
سوف تتعلّم : إيجاد الجذر التكعيبي لعدد نسبي .

نشاط :



لدى فرح صناديق على شكل مكعّبات ذات أحجام مختلفة . استخدمت صندوقًا حجمه ٨ سم^{٣} لوضع بعض حبوب الدواء الخاصّة بها ، وصندوقًا ثانيًا حجمه ٢٧ سم^{٣} لوضع صابون معطَّر فيه ، وصندوقًا ثالثًا حجمه ١٢٥ سم^{٣} لوضع القطع الذهبية الخاصّة بها . أرادت حساب طول ضلع كلّ صندوق من هذه الصناديق المكعّبة لتجهيز مكان مناسِب داخل الخزانة الخاصّة بها .

ساعِد فرح على معرفة طول كلّ ضلع بإكمال الجدول التالي :

الشكل	صندوق حبوب الدواء	صندوق صابونة معطّرة 	صندوق قطع ذهبية 
حجمه	٨ سم^{٣}	٢٧ سم^{٣}	١٢٥ سم^{٣}
الحجم بصورة أسّية	٨ = ٢ × ٢ × ٢ = (٢)^{٣}	٣^{٣}	٥^{٣}
طول الضلع	٢ سم	٣ سم	٥ سم

العبارات والمفردات :
الجذر التكعيبي
The Cubic Root

تذكّر أنّ :
- مكعّب العدد ل
= ل^{٣}
= ل × ل × ل
- مكعّب العدد ٢
= (٢)^{٣} = ٢ × ٢ × ٢
= ٨

تدرّب (١) :

أكمِل الجدول التالي :

العدد	١	٣	٤	-٦	٨	-٩	- ص
مكعّبه	١	٢٧	٦٤	-٢١٦	٥١٢	-٧٢٩	- ص^{٣}

تعميم :

لأيّ عدد نسبي $\frac{أ}{ب}$ يكون :

مكعّب العدد $\frac{أ}{ب} = (\frac{أ}{ب})^{٣} = \frac{أ}{ب} \times \frac{أ}{ب} \times \frac{أ}{ب} = \frac{أ^{٣}}{ب^{٣}}$

الجذر التكعيبي للعدد النسبي أ هو العدد الذي مكعّبه أ ويرمز له بالرمز $\sqrt[٣]{أ}$.

ملاحظة :

١- لإيجاد $\sqrt[٣]{أ}$ نحلّل العدد أ إلى عوامله الأوّلية ونضعه على الصورة أ = ب^{٣}

٢- الجذر التكعيبي لعدد نسبي موجَب هو عدد نسبي موجَب . فمثلًا $\sqrt[٣]{٨} = ٢$

٣- الجذر التكعيبي لعدد نسبي سالب هو عدد نسبي سالب . فمثلًا $\sqrt[٣]{-٨} = -٢$

تدرّب (٢) :

أكمِل الجدول التالي :

العدد (أ)	٨	-١٢٥	٢١٦	٣٤٣	-١٠٠٠
الجذر التكعيبي $(\sqrt[٣]{أ})$	٢	-٥	٦	٧	-١٠
السبب				$٣٤٣ = (٧)^{٣}$	

تدرّب (٣) :

أوجِد كلًّا ممّا يلي :

أ) $\sqrt[٣]{\frac{٨}{٢٧}} = \sqrt[٣]{\frac{٢ \times ٢ \times ٢}{٣ \times ٣ \times ٣}} = \sqrt[٣]{\frac{(٢)^{٣}}{(٣)^{٣}}} = \sqrt[٣]{(\frac{٢}{٣})^{٣}} = \frac{٢}{٣}$

ب) $\sqrt[٣]{-٠,٠٦٤} = \sqrt[٣]{\frac{-٦٤}{١٠٠٠}} = \frac{-٤}{١٠} = \frac{-٢}{٥}$

تدرّب (٤) :

أوجِد الجذر التكعيبي لكلّ من الأعداد التالية :

١ $-١٥\frac{٥}{٨}$

$\sqrt[٣]{-١٥\frac{٥}{٨}} = \sqrt[٣]{\frac{-١٢٥}{٨}}$

$= \frac{-٥}{٢} = -٢\frac{١}{٢}$

ب ٣,٣٧٥

$\sqrt[٣]{٣,٣٧٥} = \sqrt[٣]{\frac{٣٣٧٥}{١٠٠٠}} = \frac{١٥}{١٠} = ١\frac{١}{٢}$

٣٣٧٥	÷ ٣
١١٢٥	٣
٢٧٥	٣
١٢٥	٥
٢٥	٥
٥	٥
١	

تذكَّرْ أنّ :
ترتيب العمليات الحسابية كما يلي :
(١) ما داخل الأقواس
(٢) الأسس والجذور
(٣) الضرب والقسمة
(٤) الجمع والطرح

مثال :

أوجِد ناتج ما يلي : $\sqrt{٣٦}\ ٥ - \sqrt[٣]{-٢٧}\ ٤$

الحلّ :

$٥ \times ٦ - ٤ (-٣) = \sqrt[٣]{-٢٧}\ ٤ - \sqrt{٣٦}\ ٥$

$= ٣٠ - (-١٢)$

$= ٣٠ + ١٢ = ٤٢$

تمـــرَّنْ :

(١) أوجِد الجذر التكعيبي لكلّ من الأعداد التالية :

١ ٠,٢١٦ ... $\sqrt[٣]{٢١٦} = \sqrt[٣]{\frac{٢١٦}{١٠٠٠}} = \frac{٦}{١٠} = ٠,٦$

ب $\frac{-٢٧}{٨}$ ... $\sqrt[٣]{\frac{-٢٧}{٨}} = \frac{-٣}{٢} = -١\frac{١}{٢}$

ج ٠,١٢٥ − ... $\sqrt[٣]{-١٢٥} = \sqrt[٣]{\frac{-١٢٥}{١٠٠٠}} = \frac{-٥}{١٠} = -\frac{١}{٢}$

د $-٤٢\frac{٧}{٨}$ ... $\sqrt[٣]{-٣٤٣} = \frac{-٧}{٢} = -٣\frac{١}{٢}$

(٢) مكعّب حجمه ٦٤ سم^٣ . أوجد طول حرفه .

طول الحرف $= \sqrt[٣]{٦٤} = ٤$ سم

٣ أوجد ناتج ما يلي :

أ) $٣\sqrt[٣]{-٦٤} + ٢\sqrt[٣]{١٢٥}$

$٣ \times -٤ + ٢ \times ٥$

$-١٢ + ١٠ = -٢$

ب) $٢\sqrt[٣]{٢٧} + ٣\sqrt[٣]{-٨}$

$٢ \times ٣ + ٣ \times -٢$

$٦ - ٦ = صفر$

في التمارين من (٤ – ٩) ظلل دائرة الإجابة الصحيحة :

٤ $\sqrt[٣]{(-٠,٠٤)^{٣}}$ =

(أ) ٠,٠٤ (ب) -٠,٠٤ (جـ) ٠,٠١٦ (د) ٤

٥ $\sqrt[٣]{\frac{-٣٤٣}{٢٧٠٠٠}}$ =

(أ) $\frac{٧}{٣٠}$ (ب) $\frac{٣٠}{٧}$ (جـ) $\frac{-٧}{٣٠}$ (د) $\frac{-٣٠}{٧}$

٦ $\frac{\sqrt[٣]{١٢٥}}{\sqrt[٣]{٢٥}}$ =

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) ٠,١

٧ $\sqrt[٣]{٠,٠٠٨}$ =

(أ) ٠,٢ (ب) ٠,٠٢ (جـ) ٠,٨ (د) ٢

٨ $\sqrt[٣]{ب^{٣}}$ =

(أ) $ب^{٣}$ (ب) $ب^{٢}$ (جـ) ب (د) -ب

٩ مكعّب حجمه ٨ م^{٣} . فإنّ مساحة أحد أوجهه تساوي :

(أ) ٢ م^{٢} (ب) ٤ م (جـ) ٤ م^{٢} (د) ٨ م^{٢}

٩-٢ مراجعة الوحدة الثانية
Revision Unit Two

١ مثّل الأعداد النسبية التالية على خطّ الأعداد .

$1\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{4}$ ، $\frac{-1}{4}$ ، ٠,٢٥ ، $-1,75$

٢ رتّب الأعداد التالية ترتيبًا تصاعديًّا .

$5\frac{1}{3}$ ، $-5\frac{1}{5}$ ، ٥,٢٥ ، $-٥,٤$

٣ رتّب الأعداد التالية ترتيبًا تنازليًّا .

$\frac{3}{4}$ ، $\frac{-3}{5}$ ، ٠,٨ ، $-٠,٨$

٤ أوجد الناتج في أبسط صورة .

أ $-٥,٦٣ - (-٢,٠٧٣)$

ب $-٥,٤ + 3\frac{1}{3}$

جـ $-6\frac{5}{8} + 3\frac{5}{6}$

د $10\frac{2}{3} - 18\frac{1}{5}$

ب $1\frac{2}{3} \times 2\frac{1}{6}$

$= 3\frac{11}{18}$

د $5\frac{1}{7} \div (-1\frac{1}{7})$

$= -4\frac{1}{6}$

و $1\frac{1}{6} \times (\frac{6}{7} - \frac{3}{14})$

$1\frac{1}{6} \times \frac{9}{14} = \frac{3}{4}$

ح $3\frac{2}{5} + 6\frac{7}{9} - 3\frac{2}{5}$

$6\frac{7}{9}$

٥ أوجِد ناتج كلّ ممّا يلي :

ا $\sqrt{0,00647}$

$0,08$

ب $\sqrt{\frac{81}{100}}$

$\frac{9}{10}$

ج $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$

$\sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

٦ يريد جاسم صناعة عطر في المنزل ، وذلك من خلال خلط $9\frac{1}{2}$ جرام من العطر المركّز و ٣٩,٨ جرامًا من الكحول الأبيض و ٠,٤٥ جرام من الصندل للتثبيت .

ا ما كمّية الجرامات التي استخدمها في صناعة العطر ؟

الكمية $= 9\frac{1}{2} + 39,8 + 0,45 = 49,75$ جم

ب إذا كان يريد جاسم عمل $\frac{3}{4}$ الكمّية ، فما الكمّية اللازمة من الجرامات التي يحتاج إليها .

الكمية $= \frac{3}{4} \times 49\frac{1}{2} = 37\frac{5}{16}$ جم

٧ خزّان ماء على شكل مكعّب حجمه ١٢٥ مترًا مكعّبًا . أوجِد طول حرفه .

طول الحرف $= \sqrt[3]{125} = 5$

اختبار الوحدة الثانية

أوّلًا : في البنود (١-٤) ظلِّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ $\frac{٧}{١٠}$ المعكوس الضربي للعدد $١\frac{٣}{٧}$	(أ)	(ب)
٢ $٠,١٥ + (-٠,٥) = ٠,٢$	(أ)	(ب)
٣ $٠,\overline{٦} = ٠,٦$	(أ)	(ب)
٤ $\frac{-٧}{١٥} - (\frac{-٣}{١٥}) = \frac{-١٠}{١٥}$	(أ)	(ب)

ثانيًا: لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة :

٥ ناتج $\frac{٢}{٥} \times \frac{٥}{٧} \times \frac{٧}{٩}$ يساوي :

(أ) $\frac{٢}{٩}$ (ب) $\frac{٥}{٩}$ (جـ) $\frac{٧}{٩}$ (د) $\frac{٥}{٧}$

٦ $\frac{١}{٢} \div \frac{١}{٤} =$

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) ٢ (جـ) ٨ (د) $\frac{١}{٢}$

٧ $\sqrt{٩٠٠} =$

(أ) ٣٠٠ (ب) ٣ (جـ) ٣٠ (د) ٩٠

٨ $\sqrt[٣]{٣\frac{٣}{٨}} =$

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٨}$ (د) $\frac{٩}{٤}$

٩ العددان الصحيحان المتتاليان اللذان يقع بينهما $\sqrt{٧٧}$ هما :

(أ) ٨، ٦ (ب) ٤، ٣ (جـ) ٣، ٢ (د) ٢، ١

---

١٠ الأعداد المرتبة ترتيبًا تصاعديًّا هي :

(أ) $-\frac{١}{٩}$ ، $-\frac{٢}{٣}$ ، ٠ ، ٠,٧ (ب) $-\frac{٢}{٣}$ ، $-\frac{١}{٩}$ ، ٠ ، ٠,٧

(جـ) ٠,٧ ، ٠ ، $-\frac{٢}{٣}$ ، $-\frac{١}{٩}$ (د) ٠ ، ٠,٧ ، $-\frac{٢}{٣}$ ، $-\frac{١}{٩}$

الوحدة الثالثة

النسبة والتناسب
Ratio and Proportion

المشروعات الصغيرة
The small projects

مشروع الوحدة :
(التاجر الصغير)

تمّ إنشاء الصندوق الوطني في عام ٢٠١٣م لرعاية وتنمية المشروعات الصغيرة والمتوسطة ، حيث يهدف هذا الصندوق إلى دعم الشباب ومحاربة البطالة وتمكين القطاع الخاص من المساهمة في تحقيق النمو الاقتصادي في دولة الكويت .

خطة العمل :

- اختيار منتج محدد تشارك فيه المجموعات في مقصف المدرسة وتحديد سعر البيع والمكسب لهذا المنتج كنسبة مئوية .

خطوات تنفيذ المشروع :

- حدد المنتج (نوع من العصير – نوع من الكيك نوع من السندويش ...)
- حدد ثمن المنتج .
- حدد ثمن البيع .
- حدد النسبة المئوية للمكسب .
- حدد نسبة خصم لزيادة مبيعات المنتج .
- أوجد السعر الجديد والمكسب .

المنتج	سعر المنتج	سعر البيع	المكسب	نسبة المئوية للمكسب
عصير	٢٠٠ فلس	٣٠٠	١٠٠	٥٠٪

خصم على سعر البيع السابق....				
المنتج	سعر البيع القديم	سعر البيع الجديد	الخصم	نسبة الخصم
عصير	٣٠٠	٢٤٠	٦٠	...

علاقات وتواصل :

- يقوم المتعلّمون بالتشاور باختيار المنتج والتشاور في نسبة الخصم.

عرض العمل :

- تعرض المجموعات جداولها وتناقش كل منتج ومكاسبه والمنتج الجديد ومكاسبه ، وتحدد أرباح كل فريق .

مخطَّط تنظيمي للوحدة الثالثة

النسبة والتناسب

المعدَّلات والنسب
- النسبة
- المعدَّل
- معدَّل الوحدة

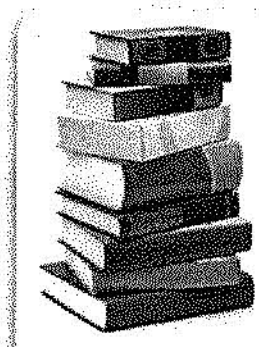
التناسب
- تناسب طردي و عكسي
- الحل بالضرب التقاطعي
- حل التناسبات

النسبة المئوية
- النسبة المئوية التزايدية والتناقصية
- نسبة مئوية
  - مقارنة النسب المئوية
  - إيجاد النسبة المئوية من عدد
  - حساب ذهني

١-٣ حل التناسب (طردي – عكسي)
Solving Proportion (Direct – Inverse)

سوف تتعلّم : حل التناسب – حل التناسب (طردي – عكسي)

نشاط (١) :



ذهبت نور إلى معرض الكتاب الدولي وأرادت شراء بعض الكتب ، فإذا كان سعر كتاب ما ٥ دنانير والمطلوب :

معرفة سعر ٣ ، ٤ ، ٥ ، ١٠ كتب .

بإكمال الجدول التالي:

عدد الكتب	١	٣	٤	٥	١٠
ثمنها بالدينار	٥	١٥	٢٠	٢٥	٥٠

ونلاحظ أنّ : $\frac{١}{٥} = \frac{٣}{١٥} = \frac{٤}{٢٠} =$ ..... [نسمّي ذلك تناسبًا] .

ونلاحظ العكس أنّ : $\frac{٥}{١} = \frac{١٥}{٣} = \frac{٢٠}{٤} =$ ..... [نسمّي ذلك تناسبًا] .

من الجدول نلاحظ أنّ: عدد الكتب يتناسب مع ثمنها بالدينار .

التناسب: هو تساوي نسبتين .

تدرّب (١) :

صندوق فيه عدد من الكرات البيضاء والكرات الحمراء . فإذا كانت نسبة عدد الكرات البيضاء إلى الكرات الحمراء هي ٧ : ٣ وكان عدد الكرات الحمراء هو ٢٤ كرة .

فما عدد الكرات البيضاء ؟

$\frac{\text{عدد الكرات البيضاء}}{\text{عدد الكرات الحمراء}} = \frac{٧}{٣}$ ، نفرض أنّ عدد الكرات البيضاء = س

$\frac{٧}{٣} = \frac{\text{س}}{٢٤}$

$\text{س} = \frac{٧ \times ٢٤}{٣} = ٥٦$

إذًا عدد الكرات البيضاء = ٥٦

العبارات والمفردات :
التناسب
Proportion
تساوي نسبتين
Equivalent Ratios
تناسب طردي
Direct Proportion
تناسب عكسي
Inverse Proportion

معلومات مفيدة :
يستخدم مصمّمو المجلّات التناسبات لوضع الصور بمقاييس معيّنة في الأماكن المخصّصة لها في المجلّة .

تذكّر أنّ :
النسبة بين مقدارين :
– قسمة المقدار الأوّل على المقدار الثاني أو العكس .
– علاقة بين كمّيتين أو مقدارين من الوحدات نفسها .
إذا كانت $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$
فإنّ :
أ × د = ب × جـ

تدرّب (٢) :

حل التناسب .

❶ $\frac{٥}{٢} = \frac{٢}{س}$

$س = \frac{٢ \times ٢}{٥}$

$س = \frac{٤}{٥}$

❷ $\frac{١٠,٥}{٠,٥} = \frac{س}{٤}$

$س = \frac{٤ \times ١٠,٥}{٠,٥}$

$س = ٨٤$

❸ $\frac{٦}{١ - ب} = \frac{١}{٢}$

$(ب - ١) = \frac{٢ \times ٦}{١}$

$ب - ١ = ١٢$

$ب = ١٢ + ١$

$ب = ١٣$

نشاط (٢) :

شارك حمد في معرض الكويت الدولي للعطور .

باع ١٥ زجاجة عطر خلال ٣ ساعات ..... (١)

إذا افترضنا أنّ معدّل المبيعات هو نفسه طيلة النهار ، فإنّه يكون قد :

باع ٢٥ زجاجة عطر خلال ٥ ساعات ..... (٢)

من خلال (١) ، (٢) لاحظ أنّه عندما زاد عدد الساعات زاد في المقابِل بيع زجاجات العطر. هذا النوع من التناسب يُسمّى تناسبًا طرديًّا .

التناسب الطردي : إذا حدث تغيّر في كمّية ما ويقابله التغيّر نفسه في كمّية أخرى بالزيادة أو النقصان ، فنقول إنّ الكمّيتين متناسبتان طرديًّا . إذا كانت $\frac{أ}{ب}$ متناسبة طرديًّا مع $\frac{جـ}{د}$ ، فإن: $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{د}$ حيث ب ، د ≠ ٠ .

ولمعرفة الكمّية المباعة خلال ٥ ساعات نكوّن التناسب التالي :

لنفرض أنّ عدد الزجاجات المباعة هو س .

زجاجة العطر	الساعات
١٥	٣
س	٥

زيادة ↓ ، زيادة ↓

نوع التناسب طردي

$\frac{١٥}{س} = \frac{٣}{٥}$ (الضرب التقاطعي)

$س = \frac{٥ \times ١٥}{٣}$

$س = ٢٥$

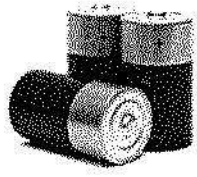
إذًا عدد زجاجات العطر المباعة خلال ٥ ساعات هو ٢٥ .

فكر وناقش

قرّر حمد استخدام معدّل الوحدة لإيجاد عدد زجاجات العطور. ما رأيك في ذلك ؟ وضّح الحلّ .

تذكّرْ أنّ :
المعدّل :
هو مقارنة بين كميّتين لهما وحدات قياس مختلفة .
معدّل الوحدة :
هو مقارنة لوحدة واحدة .

تدرّب (٣) :



يبلغ ثمن ٣ بطّاريّات ٢٤٠ فلسًا . إذا أردنا شراء ٥ بطّاريّات من النوع نفسه ، فحدِّد نوع التناسب ثمّ أوجد ثمن شراء ٥ بطّاريّات .

بطّاريّات	فلس
٣	٢٤٠
٥	٤٠٠

نوع التناسب ..... طردي .....

❶ أكمِل الجدول :

❷ حل التناسب :

$\frac{٣}{٥} = \frac{٢٤٠}{س}$

$س = \frac{٥ \times ٢٤٠}{٣}$

$س = ٤٠٠$

تدرّب (٤) :

سيّارة يمكنها أن تسير مسافة ١٥٠ كم مستخدِمة ١٥ لترًا من البنزين . فما المسافة التي تسيرها باستخدام ٢٥ لترًا من البنزين ، علمًا أنّ معدل الاستهلاك هو نفسه (عند ثبوت السرعة) .

ملاحظة :
كلما زادت المسافة زاد استهلاك البنزين .

$\frac{١٥٠}{س} = \frac{١٥}{٢٥}$ $س = \frac{١٥٠ \times ٢٥}{١٥} = ٢٥٠$

المسافة = ٢٥٠ كم

نشاط (٣)

يستطيع ٣ عمّال إنجاز عمل ما في ١٢ يومًا . في كم يومًا يتمّ إنجاز العمل نفسه بواسطة ٩ عمال في المستوى نفسه من الكفاءة ؟ « ماذا تتوقّع : هل يزيد عدد الأيام أم يقلّ » ؟

التناسب العكسي : إذا حدث تغيّر بالزيادة في كمّية ما ويقابله تغيّر بالنقصان في كمّية أخرى « أو العكس » فنقول إنّ الكمّيتين متناسبتان عكسيًا .

إذا كانت $\frac{أ}{ب}$ تتناسبة عكسيًا مع $\frac{جـ}{د}$ فإن: $\frac{أ}{ب}$ تتناسب طرديًا مع $\frac{د}{جـ}$ ويكون $\frac{أ}{ب} = \frac{د}{جـ}$

لنفرض أنّ عدد الأيام هو س .

عمّال	يوم
٣	١٢
٩	س

نقصان ↓ ، زيادة ↓

$\frac{٣}{٩} = \frac{س}{١٢}$

س = $\frac{٣ \times ١٢}{٩}$ = ٤

س = ٤

عدد الأيام = ٤ أيام

نوع التناسب عكسي

تدرّب (٥)

تقطع سيّارة المسافة من مدينة (أ) إلى مدينة (ب) خلال زمن قدره ٣٠ دقيقة عندما كانت تسير بسرعة ١٠٠ كم / ساعة ، فما هو الزمن اللازم لقطع المسافة نفسها إذا سارت بسرعة ١٢٠ كم/ ساعة (عند ثبات السرعة) ؟

ملاحظة :
١) السرعة = $\frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$
٢) كلما زادت السرعة قل الزمن اللازم .

لنفرض أنّ الزمن المطلوب هو س .

$\frac{\text{السرعة في الحالة الأولى (١٠٠)}}{\text{السرعة في الحالة الثانية (١٢٠)}} = \frac{\text{الزمن في الحالة الثانية (س)}}{\text{الزمن في الحالة الأولى (٣٠)}}$

سرعة	زمن
١٠٠	٣٠
١٢٠	س

زيادة ↓ ، نقصان ↓

$\frac{١٠٠}{١٢٠} = \frac{س}{٣٠}$

س = $\frac{١٠٠ \times ٣٠}{١٢٠}$ = ٢٥

إذًا الزمن (س) هو ٢٥ دقيقة .

تمـــرَّنْ :

١ حُلَّ التناسبات :

أ $\frac{١٨}{ص} = \frac{٢٧}{٦}$

ص = ١٨ × ٦ / ٢٧

ص = ٤

ب $\frac{س}{٩٠} = \frac{٧,٢}{٦٠}$

س = ٧,٢ × ٩٠ / ٦٠

س = ١٠,٨

جـ $\frac{٦}{ل - ١} = \frac{١}{٣}$

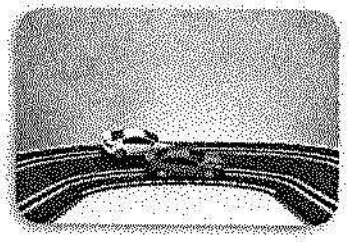
ل - ١ = ٣ × ٦ / ١

ل - ١ = ١٨

ل = ١٩

---

٢ في سباق السيّارات قطع وليد مسافة الـ ٥٠٠ كم الأولى في ٥ ساعات .



أ أوجِد المعدَّل الذي قطع فيه وليد المسافة بالكيلومتر في الساعة .

$\frac{٥٠٠}{٥}$ = ١٠٠ كم / ساعة

ب بهذا المعدَّل نفسه ، أُحسب المسافة التي قطعها وليد في ساعتين خلال هذا السباق .

$\frac{٥٠٠}{س} = \frac{٥}{٢}$

س = ٥٠٠ × ٢ / ٥ = ٢٠٠ كم

تناسب طردي

في التمارين من (٣ - ٦) حدد نوع التناسب ثم أوجد المطلوب :

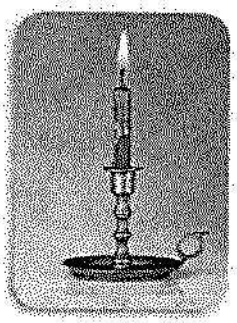
٣ قامت إحدى المجموعات في الصفّ الثامن بنشاط عن كيفية صناعة الصابون السائل في مختبر العلوم ، حيث كانت نسبة هيدروكسيد البوتاسيوم إلى الزيت ١ : ٦ على الترتيب . إذا كانت كمّية هيدروكسيد البوتاسيوم ٤٥,٤ مل ، فكم تكون كمّية الزيت في الصابون السائل ؟

$\frac{١}{٦} = \frac{٤٥,٤}{س}$

س = ٤٥,٤ × ٦

الزيت = ٢٧٢,٤ مل

تناسب طردي



٤ شمعة طولها ٤٠ سم تحترق في مدّة قدرها ٦ ساعات .
فكم يلزم من الوقت لاحتراق شمعة من السمك نفسه وفي الظروف نفسها بطول ٥٠ سم .

تناسب طردي

٤٠ ٦
٥٠ س

$\frac{٤٠}{٥٠} = \frac{٦}{س}$ ، $س = \frac{٦ \times ٥٠}{٤٠}$

زمن الشمعة = ٧,٥ ساعة

٥ يلزم ٢١ عاملًا لجني محصول الطماطم من مساحة الأرض خلال ٨ ساعات . أحسب عدد العمّال اللازم لجني المحصول خلال ١٢ ساعة .

تناسب عكسي

٢١ ٨
س ١٢

$\frac{٢١}{س} = \frac{١٢}{٨}$

$س = \frac{٨ \times ٢١}{١٢}$

عدد العمال = ١٤ عامل

٦ إذا كان ٢٠ رجلًا يحفرون بئرًا في ١٥ يومًا ، ففي كم يومًا يحفر ٣٠ رجلًا البئر نفسها إذا كانت قدرات الرجال متساوية في الحالتين .

تناسب عكسي

٢٠ ١٥
٣٠ س

$\frac{٢٠}{٣٠} = \frac{س}{١٥}$ ، $س = \frac{١٥ \times ٢٠}{٣٠}$

عدد الأيام = ١٠ أيام

٢-٣ إيجاد النسبة المئوية من عدد
Finding Percent of a Number

سوف تتعلّم : كيفية إيجاد النسبة المئوية من عدد (ذهنيًّا - جبريًّا).

نشاط :

يمتلك بدر سلسلة مطاعم في الكويت ، ويتمّ إضافة ١٥٪ بدل خدمة على قيمة الطلب .

إذا كانت قيمة الطلب ٤٠ دينارًا ، فاحسب بدل الخدمة .

لإيجاد ذلك :

الطريقة الأولى : باستخدام الحساب الذهني

فكّر : ١٥٪ = ١٠٪ + ٥٪

١٠٪ من ٤٠ = ٤

٥٪ هي نصف ١٠٪

٥٪ هي نصف ٤ = ٢ دينار

بدل الخدمة = ٤ + ٢ = ٦ دنانير

الطريقة الثانية : باستخدام الحل الجبري

١٥٪ من المبلغ

١٥٪ × ٤٠

$\frac{٣}{٢٠} \times \frac{٤٠}{١} = ٦$

إذًا بدل الخدمة للطلب = ٦ دنانير .

معلومات مفيدة:
يستخدم مندوبو المبيعات النسب المئوية في تحديد نسب الخصم بسرعة .

تذكّر أنّ :
$\frac{١}{٢}$ = ٥٠٪
$\frac{١}{١٠}$ = ١٠٪
$\frac{١}{١٠٠}$ = ١٪

تدرّب (١) :

أكمِل كلًّا ممّا يلي :

النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية من العدد
٥٠٪	٤٥٠	$\frac{٥٠}{١٠٠} \times ٤٥٠ = ٢٢٥$
٢٠٪	٨٠	$\frac{٢٠}{١٠٠} \times ٨٠ = ١٦$
١٠٪	٧٥	$\frac{١٠}{١٠٠} \times ٧٥ = ٧٫٥$
٥٪	٤٠	$\frac{٥}{١٠٠} \times ٤٠ = ٢$

مثال :

إستخدِم الحساب الذهني لإيجاد ٧٠٪ من ٦٠٠ .

الحلّ :

فكّر : ٧٠٪ تساوي ٧ أمثال ١٠٪

١٠٪ من ٦٠٠ هو ٦٠

٧٠٪ من ٦٠٠ = ٧ × ٦٠ = ٤٢٠

تدرّب (٢) :

أوجِد ٦٠٪ من ٤٨٠ بطريقتين مختلفتين .

تذكر أن :
لإيجاد قيمة نسبة مئوية بالحساب الذهنيمن عدد نقسّم النسبة المئوية إلى أجزاء مثل : ١٠٠ ٪ ، ٥٠ ٪ ، ١٠ ٪ ، ١ ٪ .

❶ ٦٠٪ تساوي ٦ أمثال ١٠٪

١٠٪ من ٤٨٠ هو ٤٨

٦٠٪ = ٦ × ٤٨ = ٢٨٨

❷

٦٠٪ من ٤٨٠

$\frac{٦٠}{١٠٠} \times ٤٨٠$

= ٢٨٨

فكّر وناقش

هل ١٠٪ من ٥٠ هي نفس قيمة ٥٠٪ من ١٠ ؟ فسّر إجابتك .

تدرّب (٣) :

في إحدى المدارس تم اختيار ٢٦,٥٪ من ٨٠٠ متعلم لأداء اختبار ميزه لمادة الرياضيات في الصف التاسع ، كم عدد هؤلاد المتعلمين ؟

عدد المتعلمين = $\frac{٢٦,٥}{١٠٠} \times ٨٠٠$ = ٢١٢ متعلم

تمـــرِّنْ :

١ أوجِد النسب المئوية التالية من العدد ٢٠٠ ٨ باستخدام الحساب الذهني :

١ ٢٪ = ٨٢٧٤	ب ١٢٪ = ٩٨٤	ج ٨٢٪ = ٦٧٢٤
= ١٦٤	١٠٪ = ٨٢ ، ٢٪ = ١٦٤	١٠٪ = ٨٢٠ ، ٣٠٪ = ٢٤٦٠
	١٠٪ = ٨٢٠	٢٪ = ٨٢ × ٢ = ١٦٤
		٥٠٪ = $\frac{1}{2}$ × ٨٢٠٠ = ٤١٠٠

٢ أوجِد كلًّا ممّا يلي :

١ ٣٠٪ من ٦٠٠	ب ١٥٪ من ٢٢ دينارًا	
١٠٪ = ٦٠	١٠٪ = ٢٫٢	
٣٠٪ = ١٠ × ٦٠ = ١٨٠	٥٪ = ١٫١	
	١٥٪ = ٣٫٣	
ج $\frac{1}{3}$ ٣٣٪ من ٩٠	د ١٢٫٥٪ من ٢٠٠	
$\frac{1}{3}$ × ٩٠ = ٣٠	١٢٫٥٪ = $\frac{1}{8}$ ، ٢٥٪ = ٥٠	
	٢٫٥٪ = ٥٠ ÷ ٢ = ٢٥	

تذكَّرْ أنّ :
$\frac{1}{3}$ ٣٣٪ = $\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$ ٦٦٪ = $\frac{2}{3}$

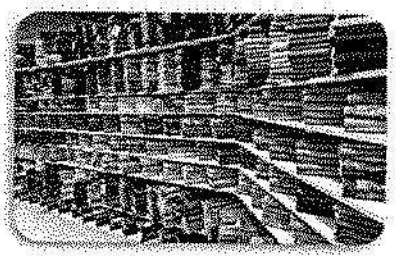
٣ إستخدِم > أو < أو = لتحصل على عبارة صحيحة :

١ ١٪ من ١٥٠ (=) ١٠٪ من ١٥
١٫٥ ١٫٥

ب $\frac{2}{3}$ ٦٦٪ من ١٨ (>) ٦٠٪ من ١٥
١٢ = ١٨ × $\frac{2}{3}$ ، ٩

ج ١٠٠٪ من ٩٥ (>) ١٠٪ من ٩٫٥
٩٥ ، ٩٫٥

د $\frac{1}{4}$٪ من ٤ (=) ٤٪ من $\frac{1}{4}$
٠٫٠١ ، ٠٫٠١



٤ باع صاحب محلّ أقمشة ٢٥ ٪ من أحد الأنواع . إذا كان لديه ١٢٠ مترًا من النوع نفسه ، فما عدد الأمتار الباقية ؟

$\frac{٢٥}{١٠٠} \times ١٢٠$

عدد الأمتار = ٣٠ متر

٥ تحتوي زجاجة عطر على حوالى ٦,٤ ٪ زيوت عطرية . إذا كان في الزجاجة ٧٥ مل من العطر ، فما مقدار الزيوت العطرية في الزجاجة ؟

$\frac{٦,٤}{١٠٠} \times ٧٥$

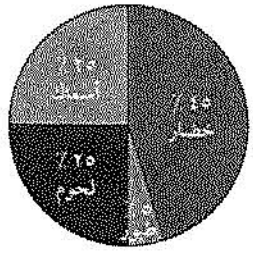
مقدار الزيوت = ٤,٨ مل

٣-٣ استخدام المعادلات لحلّ مسائل تتضمّن نسبًا مئوية
Using Equations to Solve Percentages Problems

سوف تتعلّم : كيفية استخدام المعادلات لحلّ مسائل تتضمّن نسبًا مئوية .

نشاط :

يمثّل الشكل المقابل ٤ أنواع من الأغذية الأكثر مبيعًا في أحد المتاجر ، وذلك من خلال دراسة أجريت على مجموعة من زبائن هذا المتجر ، **فإذا كان عدد الزبائن الذين يشترون الخضار هو ١٨٠ شخصًا فكم :**



أ عدد زبائن هذا المتجر ؟

للإجابة عن ذلك ، نفرض أنّ عدد زبائن هذا المتجر هو س ،
أكمِل حل المعادلة لمعرفة عدد زبائن المتجر :

٤٥ ٪ × س = ١٨٠

$\frac{٤٥}{١٠٠} \times$ س = ١٨٠

س = $\frac{١٨٠ \times ١٠٠}{٤٥}$ = ٤٠٠

فيكون عدد زبائن هذا المتجر هو ٤٠٠ شخص .

ب عدد الأشخاص الذين يشترون الطيور ؟

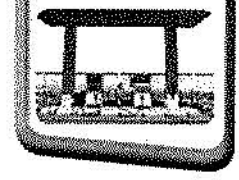
نفرض أنّ عدد الذين يشترون الطيور هو ن مثلًا ، **أكمِل :**

ن = ٥ ٪ × ٤٠٠ = ٠٫٠٥ × ٤٠٠

ن = ٢٠

فيكون عدد الزبائن الذين يشترون الطيور هو ٢٠ شخصًا .

معلومات مفيدة:
يقوم العاملون في مجال تكوين البترول بتصنيع مختلف أنواع الوقود عن طريق إضافة مركّبات كيميائية مختلفة إلى الوقود بنسب مئوية معيّنة .



تذكر أن:
* المعكوس الضربي للعدد النسبي $\frac{أ}{ب}$ هو $\frac{ب}{أ}$ حيث أ ، ب ≠ ٠
* النسبة المئوية من عدد = النسبة المئوية × العدد

فكر وناقش

- هل يمكنك بطريقة ذهنية أن تحسب عدد الزبائن الذين يشترون الأسماك ؟
- بكم يزيد عدد الزبائن الذين يشترون الخضار عن عدد الذين يشترون الأسماك ؟

مثال (١) :

في إحدى المدارس يتناول ٤٨٠ متعلمًا إفطارهم قبل الذهاب إلى المدرسة ويمثّلون ٨٠ ٪ من عدد متعلّمي المدرسة ، فما عدد متعلّمي المدرسة ؟

الحلّ :

نفرض أنّ عدد متعلّمي المدرسة هو س فإنّ :

$$٨٠\,٪ \times س = ٤٨٠$$

$$\frac{٨٠}{١٠٠} \times س = ٤٨٠$$

$$\frac{٨٠}{١٠٠} \times \frac{١٠٠}{٨٠} \times س = ٤٨٠ \times \frac{١٠٠}{٨٠}$$

$$س = \frac{٤٨٠ \times ١٠٠}{٨٠}$$

$$س = ٦٠٠$$

إذًا عدد متعلّمي المدرسة هو ٦٠٠ متعلّم .

تذكّر أنّ :
يمكن حلّ المعادلة باستخدام مفهوم العملية العكسية .

تدرّب (١) :

ما العدد الذي يمثّل ٢٠٠ ٪ من العدد ١,٦ ؟

نفرض أنّ العدد هو ن فإن :

ن = ٢٠٠ ٪ × ١,٦

ن = $\frac{٢٠٠}{١٠٠} \times ١,٦$

ن = ٣,٢ ، إذًا العدد هو ٣,٢

تدرّب (٢) :

ما النسبة المئوية التي تمثّل قيمة ٣٦ من ١٢٠ ؟

نفرض أنّ النسبة المئوية هي ن فإن :

تذكر أن:
النسبة المئوية = $\frac{\text{الجزء}}{\text{الكل}} \times ١٠٠ ٪$

ن من ١٢٠ = ٣٦

ن × ١٢٠ = ٣٦

$ن \times ١٢٠ \times \frac{١}{١٢٠} = ٣٦ \times \frac{١}{١٢٠}$

ن = ٣٠ ٪

هل يمكن حل مثال (١) ، تدرب (١) ، تدرب (٢) بطريقة أخرى ؟

مثال (١)

$\frac{٨٠}{١٠٠} = \frac{٤٨٠}{س}$

تدرب (١)

$\frac{٤٨٠}{س} = \frac{٤٠}{١}$

تدرب (٢)

$\frac{٣٦}{١٢٠} = \frac{ن}{١٠٠}$

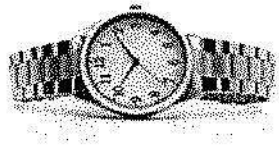
مثال (٢) :

بيعت إحدى ساعات اليد بتخفيض قدره ٢٠ ٪ من ثمنها الأصلي . إذا كان ثمنها بعد التخفيض هو ٢٨ دينارًا ، فما ثمنها الأصلي قبل التخفيض ؟

الحلّ :

النسبة المئوية للبيع = ١٠٠ ٪ − النسبة المئوية للتخفيض

= ١٠٠ ٪ − ٢٠ ٪ = ٨٠ ٪



إذا كان الثمن الأصلي س ، فإنّ :

٨٠ ٪ × س = ٢٨

$\frac{٨٠}{١٠٠} \times س = ٢٨$

$\frac{٨٠}{١٠٠} \times \frac{١٠٠}{٨٠} \times س = ٢٨ \times \frac{١٠٠}{٨٠}$

$س = \frac{٢٨ \times ١٠٠}{٨٠} = ٣٥$

إذًا ثمنها الأصلي قبل التخفيض = ٣٥ دينارًا

تمـــرّنْ :

١ أوجد النسبة المئوية التي تمثل ٣٥ من ٧٥ .

$\frac{٣٥}{٧٥} \times ١٠٠ = ٤٦٫٦٧\ ٪$

٢ ما العدد الذي يمثل ٤٥ ٪ من ٨٠ ؟

$\frac{٤٥}{١٠٠} \times ٨٠ = ٣٦$

٣ ما العدد الذي ٥٠ ٪ منه هو ٤٠٠ ؟

$\frac{٥٠}{١٠٠} = \frac{٤٠٠}{س}$

$س = \frac{٤٠٠ \times ١٠٠}{٥٠} = ٨٠٠$

٤ إذا نجح ٢٥٥ متعلّمًا في مدرسة وكانت نسبة النجاح هي ٨٥ ٪ ، فكم عدد متعلّمي هذه المدرسة ؟

$\frac{٨٥}{١٠٠} = \frac{٢٥٥}{س}$

عدد المتعلمين $= \frac{٢٥٥ \times ١٠٠}{٨٥} = ٣٠٠$ متعلم

٥ قامت لطيفة بحمية غذائية أفقدتها ٢٠ ٪ من وزنها ليصبح وزنها ١٠٠ كجم ، أوجد وزنها قبل الحمية .

وزنها الحالي $= ١٠٠ - ٢٠ = ٨٠$ ٪ من وزنها قبل الحمية

$\frac{٨٠}{١٠٠} = \frac{١٠٠}{س}$

وزنها قبل الحمية $= \frac{١٠٠ \times ١٠٠}{٨٠} = ١٢٥$ كجم

٦ أثناء مهرجان هلا فبراير ، يقدّم محلّ للحلوى تخفيضًا قدره ٣٥ ٪ على كل منتجاته ، فبكم يبيع طبق حلوى ثمنه الأصلي ٢٠ دينارًا ؟

التخفيض $= \frac{٣٥}{١٠٠} \times ٢٠ = ٧$ دينار

الثمن بعد التخفيض $= ٢٠ - ٧ = ١٣$ دينار

٤-٣ النسبة المئوية التزايدية والنسبة المئوية التناقصية
Percent Increase and Percent Decrease

سوف تتعلّم: حلّ مسائل تتضمّن نسبًا مئوية تزايدية ونسبًا مئوية تناقصية .

العبارات والمفردات :
النسبة المئوية التزايدية
Percent Increase
النسبة المئوية التناقصية
Percent Decrease

تشاهد :

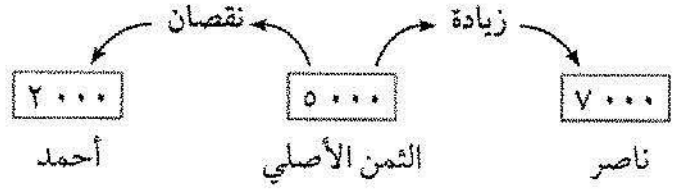
بدأ كلٌّ من ناصر و أحمد تجارتهما برأسمال قدره ٥٠٠٠ دينار كويتي ، وخلال الشهر الأوّل أصبح ما مع ناصر ٧٠٠٠ دينار كويتي ، وأصبح ما مع أحمد ٢٠٠٠ دينار كويتي خلال الشهر نفسه.

١ أجِب عمّا يلي :

أ هل زاد أم نقص ما مع ناصر خلال هذا الشهر ؟ ..... زيادة .....

ب هل زاد أم نقص ما مع أحمد خلال هذا الشهر ؟ ..... نقصان .....

٢ من خلال المخطّط التالي ، أجِب عن الأسئلة التالية :



أ ما هي النسبة المئوية للزيادة في ما مع ناصر خلال هذا الشهر؟

مقدار الزيادة = ٧٠٠٠ − ٥٠٠٠ = ٢٠٠٠

معلومات مفيدة:
يحتاج تجار التجزئة إلى أن يعرفوا مقدار تخفيض سعر منتج ما في البيع من دون أن تلحق بهم الخسارة .

نلاحظ أنّ :

٥٠٠٠ (الأصل) تمثل ← ١٠٠ ٪

٢٠٠٠ (مقدار الزيادة) تمثل ← س ٪

نكوّن تناسبًا $\frac{٥٠٠٠}{٢٠٠٠} \times \frac{١٠٠}{س}$

$س = \frac{٢٠٠٠ \times ١٠٠}{٥٠٠٠} =$ ٤٠

إذًا النسبة المئوية للزيادة = ٤٠ ٪
(التزايدية)

ج ما هي النسبة المئوية للنقصان في ما مع أحمد أيضًا خلال هذا الشهر ؟

مقدار النقصان = ٥٠٠٠ - ٢٠٠٠ = ٣٠٠٠

نلاحظ أنّ :

٥٠٠٠ ← ١٠٠ ٪

٣٠٠٠ ← س ٪

(مقدار النقصان)

نكوّن تناسبًا $\frac{٥٠٠٠}{٣٠٠٠} = \frac{١٠٠}{س}$

س = $\frac{٣٠٠٠ \times ١٠٠}{٥٠٠٠}$ = ٦٠

إذًا النسبة المئوية للنقصان = ٦٠ ٪

(التناقصية)

النسبة المئوية التزايدية	$= \frac{\text{مقدار الزيادة}}{\text{القيمة الأصلية}} \times ١٠٠ ٪$
النسبة المئوية التناقصية	$= \frac{\text{مقدار النقصان}}{\text{القيمة الأصلية}} \times ١٠٠ ٪$

تدرّب (١) :

في أحد المحلّات التجارية كان عدد الزبائن يوم الثلاثاء ٦٠٠ شخص وفي يوم الأربعاء انخفض العدد إلى ٤٥٠ شخصًا .

أ أوجد النسبة المئوية للانخفاض في عدد الزبائن ليوم الأربعاء .

مقدار (النقصان) = ٦٠٠ - ٤٥٠ = ١٥٠

النسبة المئوية التناقصية = $\frac{١٥٠}{٦٠٠} \times ١٠٠ ٪$

= ٢٥ ٪

إذًا النسبة المئوية للانخفاض (التناقصية) = ٢٥ ٪

إذا زاد عدد الزبائن ليوم الخميس بنسبة ٦٠ ٪ عن يوم الثلاثاء ، فأوجِد الزيادة في عدد الزبائن ليوم الخميس ، ثمّ أوجِد عدد الزبائن في هذا اليوم .

نفرض أن الزيادة في عدد الزبائن هو س

النسبة المئوية التزايدية = $\frac{\text{مقدار الزيادة}}{\text{القيمة الأصلية}} \times ١٠٠٪$

$\frac{٦٠}{١٠٠} = \frac{س}{٦٠٠} \times ١٠٠٪$

$س = \frac{٦٠ \times ٦٠٠}{١٠٠}$

س = ٣٦٠

إذًا مقدار الزيادة في عدد الزبائن هو ٣٦٠ شخص

إذًا عدد زبائن يوم الخميس = ٦٠٠ + ٣٦٠

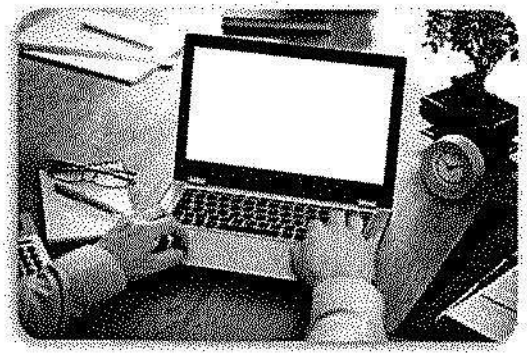
= ٩٦٠ شخصًا

لاحظ أنّ :
التغيّر إما أن يكون تزايديًا أو تناقصيًا .

مثال :

إشترى محمّد جهاز حاسوب بخصم ١٥ ٪ ومقدار هذا الخصم ٢٢٥ دينارًا كويتيًّا ، فما هو ثمن الحاسوب الأصلي ؟ وبكم دفع محمّد للجهاز ؟

الحلّ :



نفرض أن :

ثمن الحاسوب الأصلي = س

س ← ١٠٠٪

٢٢٥ ← ١٥ ٪

تكوّن تناسبًا $\frac{س}{٢٢٥} = \frac{١٠٠}{١٥}$

$س = \frac{١٠٠ \times ٢٢٥}{١٥}$

س = ١٥٠٠

إذًا ثمن الحاسوب الأصلي = ١٥٠٠ دينار

إذًا الثمن الذي دفعه للشراء = ١٥٠٠ − ٢٢٥ = ١٢٧٥ دينارًا

تدرّب (٢) :

أعلن متجر عن خصم ٢٥ ٪ على جميع الأدوات الرياضية . فإذا كانت قيمة الخصم لكرة القدم واللباس الرياضي ٢٣,٥ دينارًا ، فما سعرهما الأصلي ؟

نفرض أن : سعر الأدوات = س

س ← ١٠٠ ٪

٢٣,٥ ← ٢٥ ٪

التناسب هو $\frac{\text{س}}{٢٣,٥} = \frac{١٠٠}{٢٥}$

$\text{س} = \frac{١٠٠ \times ٢٣,٥}{٢٥}$

س = ٩٤

إذًا سعرهما معًا = ٩٤ + ٢٣,٥ = ١١٧,٥ د.ل

تدرّب (٣) :

افتُتِحَ قبل ٤ سنوات ، محلّ للألعاب الإلكترونية . واستخدم مالكُ المحلّ الحاسوب ليراقب دخله السنوي ، وقد أُصيب حاسوبه بفيروس تسبّب بخلل أدّى إلى ظهور بعض الجداول بخانات فارغة . أكمل الجدول التالي لتساعد المالك مستخدِمًا خبراتك الحسابية .

السنة	المبيعات بالدينار	مقدار التغيّر عن العام السابق بالدينار	النسبة المئوية للتغيّر	نوع التغيّر
١	٢٠٠٠٠٠	لم يُفتتح	–	–
٢	٢٤٠٠٠٠	٤٠٠٠٠	$\frac{٤٠٠٠٠}{٢٠٠٠٠٠} \times ١٠٠ ٪ = ٢٠ ٪$	زيادة
٣	١٨٠٠٠٠	٦٠٠٠٠	١٠ ٪	نقص
٤	٢٨٠٠٠٠	٨٠٠٠٠	٤٠ ٪	زيادة

تمـــرَّنْ :

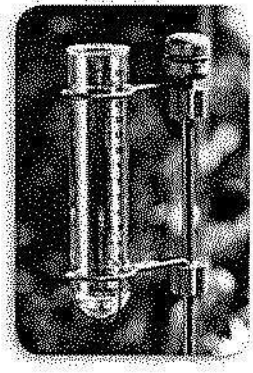
١ باعت إحدى المكتبات خلال مهرجان هلا فبراير ٤٠٠ كتاب ، ثم باعت ٦٠٠ كتاب في شهر مارس ، بيِّن نوع التغيّر ما إذا كان زيادة أم نقصانًا ؟ ثم أوجِد النسبة المئوية للتغيّر .

زيادة

مقدار الزيادة = ٦٠٠ - ٤٠٠ = ٢٠٠ كتاب

النسبة المئوية = $\frac{٢٠٠}{٤٠٠}$ × ١٠٠ ٪

= ٥٠ ٪



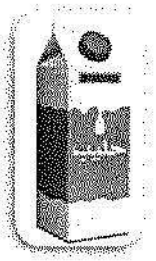
٢ معدَّل تساقط الأمطار سنويًا في الكويت خلال شهر فبراير هو ٢٤ مم وخلال شهر مارس ٢١ مم . أوجد النسبة المئوية للتغيّر في معدَّل تساقط الأمطار خلال الشهرين ، ثمّ بيِّن نوع التغيّر من زيادة أو نقصان .

نقصان

مقدار النقصان = ٢٤ - ٢١ = ٣ مم

النسبة المئوية = $\frac{٣}{٢٤}$ × ١٠٠ ٪

= ١٢٫٥ ٪



٣ تحوي علبة من الحليب المخصَّصة للدعاية نسبة زيادة مجّانية ٣٠ ٪ عمّا تحويه العلبة الأصلية ، فإذا كانت سعة علبة الحليب الأصلية ٤ لترات ، فما السعة الزائد عن العلبة الأصلية ؟ وما سعة علبة العروض ؟

مقدار الزيادة = $\frac{٣٠}{١٠٠}$ × ٤ = ١٫٢ لتر

سعة علبة العروض = ٤ + ١٫٢ = ٥٫٢ لتر

٤ جهاز رياضي سعره الأصلي ١٢٠ دينارًا كويتيًّا يُضاف إليه نسبة ١٢ ٪ خدمة توصيل . فما هو ثمنه عند التوصيل ؟

ثمن التوصيل = $\frac{١٢}{١٠٠}$ × ١٢٠

= ١٤٫٤ د.ك

الثمن عند التوصيل = ١٢٠ + ١٤٫٤ = ١٣٤٫٤ د.ك

٣-٥ مراجعة الوحدة الثالثة
Revision Unit Three

١ حُلَّ التناسب :

أ $\frac{٤}{٩} = \frac{١٠}{س}$

س = ٢٢,٥

ب $\frac{س - ١}{٤} = ١,٧$

س - ١ = ٦,٨

س = ٧,٨

٢ تدور آلة طابعة ٢٠ دورة فتطبع ٣٢٠ ورقة ، كم ورقة تطبع إذا دارت ١٤ دورة ؟

طردي

٢٠ ، ٣٢٠

١٤ ، س

$\frac{٢٠}{١٤} = \frac{٣٢٠}{س}$

عدد الورق = ٢٢٤ ورقة

٣ طائرة تطير بسرعة ٤٠٠ كم / ساعة قطعت مسافة بين دولتين خلال ٥ ساعات .
فإذا طارت بسرعة ١٠٠٠ كم / ساعة ، فكم ساعة تحتاج لتقطع المسافة نفسها ؟

عكسي

٤٠٠ ، ٥

١٠٠٠ ، س

$\frac{٤٠٠}{١٠٠٠} = \frac{س}{٥}$

عدد الساعات = ٢ ساعة

٤ في الفصل الثامن لإحدى المدارس ٢٨ متعلّمًا من بينهم ٧ متعلّمين فائقين .
أوجِد النسبة المئوية للفائقين في الفصل الثامن .

النسبة المئوية للفائقين = $\frac{٧}{٢٨} \times ١٠٠٪ = ٢٥٪$

٥ أوجِد كلًّا مما يلي :

١ ٥٪ من ٧٠٠ دينار

$\frac{٥}{١٠٠} \times ٧٠٠ = ٣٥$

ب ١٥٠٪ من ٢٣٨

$\frac{١٥٠}{١٠٠} \times ٢٣٨ = ٣٥٧$

ج ما هو العدد الذي ١٢٪ منه هو ٣٦ ؟

$\frac{١٢}{١٠٠} = \frac{٣٦}{س}$

$س = ٣٠٠$

د ما هي النسبة المئوية من ٨٠ ليكون الناتج ٤٤ ؟

النسبة المئوية $= \frac{٤٤}{٨٠} \times ١٠٠٪$

$= ٥٥٪$

٦ بيعت إحدى الساعات بتخفيض ٤٠٪ من ثمنها الأصلي . إذا كان ثمنها بعد التخفيض هو ٧٥ دينارًا ، فما ثمنها الأصلي قبل التخفيض ؟

نسبة الساعة بعد التخفيض $= ٦٠٪$

$\frac{٦٠}{١٠٠} = \frac{٧٥}{س}$

الثمن الأصلي $= ١٢٥$ دينار

٧ باعت إحدى المكتبات ٢٠٠ كتاب في شهر يونيو ، و ١٧٥ كتابًا في شهر يوليو . أوجِد النسبة المئوية للتغيّر وبيّن نوع التغيّر من زيادة أو نقصان .

نقصان

مقدار النقصان $= ٢٠٠ - ١٧٥ = ٢٥$ كتاب

النسبة المئوية $= \frac{٢٥}{٢٠٠} \times ١٠٠٪ = ١٢٫٥٪$

اختبار الوحدة الثالثة

أوّلًا : في البنود (١-٤) ظلِّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ $\frac{٣}{١٠٠}$ ١ في صورة نسبة مئوية = ١٣ ٪	(أ)	(ب)
٢ تتقاضى سلمى ٢٥,٥٠٠ دينارًا في العمل لمدة ٥ ساعات. فإن ما تتقاضاه مقابل ساعة عمل واحدة تساوي ٥,١٠٠ دنانير.	(أ)	(ب)
٣ تستهلك سيّارة ٣٠ لترًا من البنزين لتقطع مسافة ١٨٠ كم ، فإذا استهلكت ١٦٠ لترًا من البنزين عند قطعها مسافة ٩٦٠ كم ، فإنّ نوع التناسب بين هذه القيم هو تناسب عكسي .	(أ)	(ب)
٤ قرأ بدر ٢٠٠ صفحة في زمن قدره ٦ ساعات ، فإنّ الزمن الذي يستغرقه لقراءة ٥٠٠ صفحة بالمعدَّل نفسه هو ١٥ ساعة .	(أ)	(ب)

ثانيًا: لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة .

٥ سعر لعبة كمبيوتر ٤ دنانير . إذا كانت ضريبة المبيعات ٦ ٪ ، فإن ثمن التكلفة الكلية يساوي :

(أ) ٤ دنانير × ٠,٠٦ (ب) ٤ دنانير + ٠,٠٦ (ج) ٤ دنانير × ١,٠٦ (د) ٤ دنانير + ١,٠٦

---

٦ إذا كان $\frac{س}{٩٠} = \frac{٧٥}{١٥٠}$ ، فإنّ س =

(أ) ٤٥ (ب) ٤,٥ (ج) ٠,٤٥ (د) ١٨٠

---

٧ عدد ما ٣٠ ٪ منه هو ٤٥ ، فإنّ العدد هو :

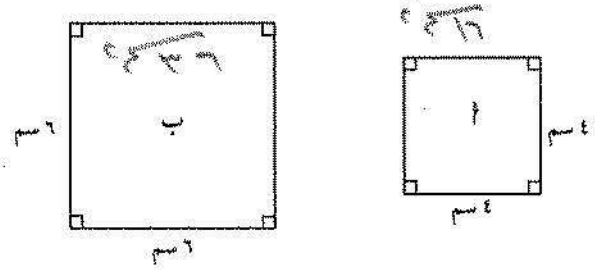
(أ) ١٥ (ب) ٧٥ (ج) ١٥٠ (د) ٢٥٠

٨ ٥٠٪ من ٢٤٠ تساوي :

(أ) ٥٠ (ب) ١٠٠ (جـ) ١١٥ (د) ١٢٠

---

٩ النسبة المئوية للزيادة في مساحة الشكل (ب) عن الشكل (أ) هي :



(أ) ٨٠٪ (ب) ١٢٥٪ (جـ) ٥٠٪ (د) ٥٥,٥٪

---

١٠ قيمة التذكرة العادية لحضور أمسية شعرية هي ٧ دنانير ، ويُمنَح المتعلّمون تخفيضًا قدره ٢٥٪ من ثمن التذكرة ، فإنّ ثمن التذكرة بعد التخفيض :

(أ) ٨,٧٥ دنانير (ب) ٧ دنانير (جـ) ٥,٢٥٠ دنانير (د) ١,٧٥٠ دينار

الوحدة الرابعة

تطابق وتشابه المثلثات

Congruency and Similarity of Triangles

الفنون الجميلة
Fine Art

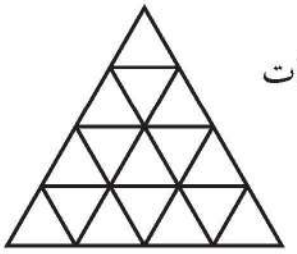
مشروع الوحدة :
(الفنان الصغير)

الفنون الجميلة هي أحد وأهمّ أنواع الفنون ، حيث تصف موهبة الإنسان ومقدرته على التعبير عن مكنونات نفسه وعقله وتجسيدها ، ليترجم بذلك جميع أحاسيسه وخواطره على شكل رسومات أو منحوتات أو أشعار أو أعمال يدوية وغيرها الكثير . وأغلب الفنّانين يستخدمون هندسة المثلّث في أعمالهم الفنّية .

خطة العمل :

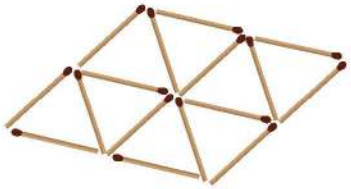
- رسم لوحة فنّية من الفسيفساء باستخدام نوع محدّد من المثلّثات .

خطوات تنفيذ المشروع :



باستخدام الأدوات الهندسية ، اصنع لوحة من الفسيفساء توظّف فيها المثلّثات التالية ومثلّثات من اختيارك (احرص على استخدام مثلّثات متطابقة أكثر)

- ارسم مثلّثًا فيه طول ضلعين وزاوية (٥ سم ، ٣ سم ، وقياس الزاوية المحدّدة بهما ١٢٠°)
- ارسم مثلّثًا متطابق الأضلاع طول ضلعه ٦ سم .
- ارسم مثلّثًا بمعلومية زاويتين وضلع واصل (٤٠° ، ٦٠° والضلع الواصل بينهما طوله ٧ سم)
- لوّن المثلّثات بطريقة مميّزة للحصول على لوحة مميّزة .



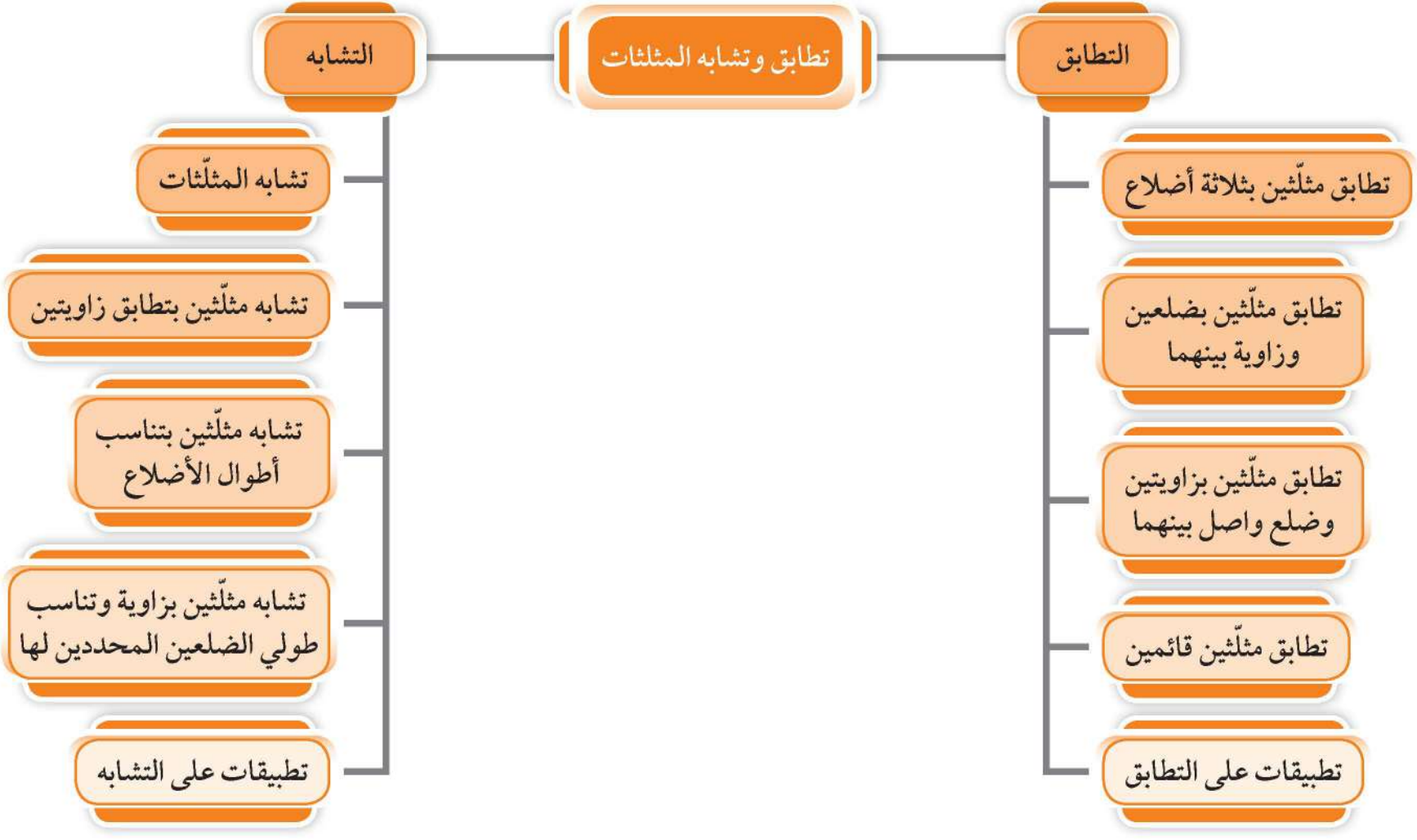
علاقات وتواصل :

- كلّ مجموعة تعرض لوحتها .
- تتبادل المجموعات اللّوحات للاطّلاع عليها .

عرض العمل :

- تعرض كلّ مجموعة اللّوحة الفنّية .
- تحدّد عدد المثلّثات المتطابقة المستخدمة .

مخطَّط تنظيمي للوحدة الرابعة



١-٤ التطابق
Congruency

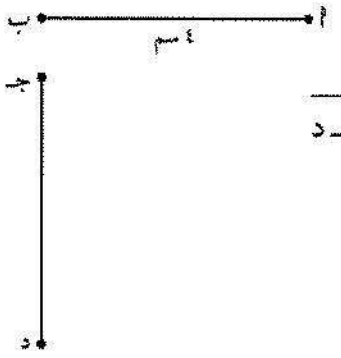
سوف تتعلّم: تطابق قطعتين مستقيمتين ، زاويتين ، مثلّثين .

تطابق قطعتين مستقيمتين

نشاط (١) :

استعن بالورق الشفاف لتتحقّق من تطابق القطعتين $\overline{أب}$ ، $\overline{جـد}$ ثمّ أكمل ما يلي :

حاول مطابقة $\overline{أب}$ على $\overline{جـد}$ بحيث



أ تنطبق على ..... ، ب تنطبق على .....

إذًا $\overline{أب}$ تطابق $\overline{جـد}$. ونرمز إلى ذلك بالرمز $\overline{أب} \cong \overline{جـد}$

العبارات والمفردات :
التطابق
Congruency
رمز التطابق ≅
Congruency sign ≅

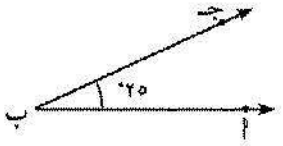
ملاحظة :
- إذا كان :
$\overline{أب} \cong \overline{جـد}$ تعني
أب = جـد .
- إذا كان :
$\hat{أ} \cong \hat{ب}$ تعني
ق(أ) = ق(ب) .

تطابق زاويتين

نشاط (٢) :

استعن بالورق الشفاف لتتحقّق من تطابق $\hat{أبجـ}$ ، $\hat{وهـد}$

حاول مطابقة $\hat{أبجـ}$ مع $\hat{وهـد}$ ثمّ أكمل ما يلي :

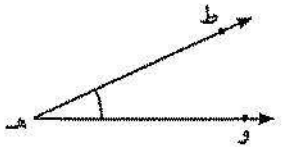


بحيث: تنطبق نقطة ب على نقطة .....

$\overleftarrow{بأ}$ ≅ .....

$\overleftarrow{بجـ}$ ≅ .....

إذًا $\hat{أبجـ} \cong$ .....



فكر وناقش

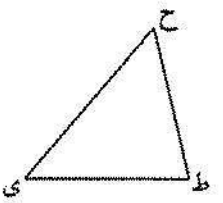
١ متى تتطابق قطعتان مستقيمتان ؟

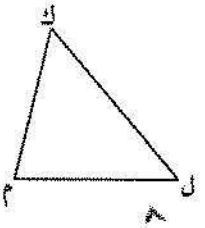
٢ متى تتطابق زاويتان ؟

تطابق مثلثين

نشاط (٣) :

إستعِن بالورق الشفّاف لتتحقق من تطابق المثلّثين ك ل م ، ح ى ط ، ثمّ أكمِل :





Δ ك ل م ≅ Δ ح ى ط	∠ك ≅ ∠ح
$\overline{ك ل}$ ≅ $\overline{ح ى}$	∠ل ≅ ∠ى
$\overline{ل م}$ ≅ $\overline{ى ط}$	∠م ≅ ∠ط
$\overline{ك م}$ ≅ $\overline{ح ط}$	

تذكر أنّ :
تراعي ترتيب الرموز عند كتابة عبارة التطابق .

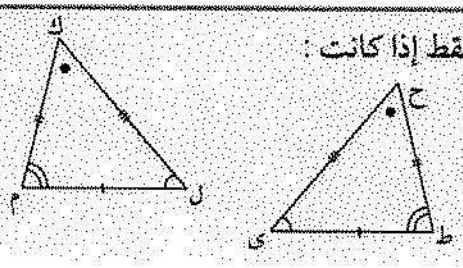
إذاً لأي مثلّثين :

تذكّر أنّ :
للمثلّث ستّة عناصر ، ثلاثة أضلاع ، ثلاث زوايا .

المثلّث ك ل م ≅ المثلّث ح ى ط إذا وفقط إذا كانت :

١ أضلاعهما المتناظرة متطابقة .

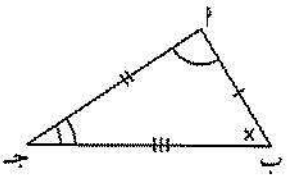
٢ زواياهما المتناظرة متطابقة .

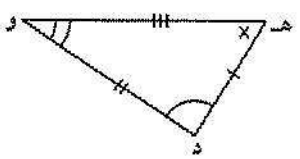


تدرّب (١) :

في الشكل المقابل Δ ا ب جـ ، Δ د هـ و .

أكمِل ما يلي حسب الشروط المعطاة بالرسم :



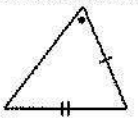
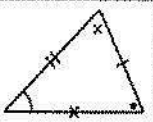
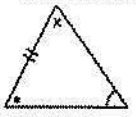
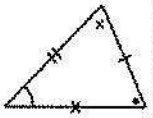
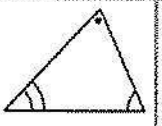
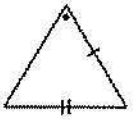
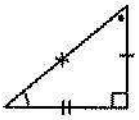
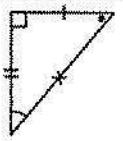


١ ∠ا ≅ ∠د	٤ ∠ب ≅ ∠هـ
٢ ∠جـ ≅ ∠و	٥ $\overline{ا ب}$ ≅ $\overline{د هـ}$
٣ $\overline{ب جـ}$ ≅ $\overline{هـ و}$	٦ $\overline{ا جـ}$ ≅ $\overline{د و}$

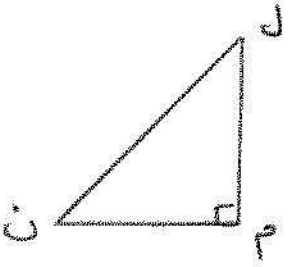
نستنتج أنّ : المثلّث ا ب جـ ≅ المثلّث د هـ و

تمـــرّنْ :

(١) في الجدول التالي حدّد المثلّثين المتطابقين :

المثلّث / المجموعة	أ	ب	جـ	د	المثلّثان المتطابقان
١					ب ، د
٢					جـ ، د

(٢) في الشكل المقابل Δ أ ب جـ قائم الزاوية في ب
باستخدام الورق الشفاف ارسم Δ ل م ن المتطابقة مع Δ أ ب جـ
ثمّ حدّد العناصر المتطابقة فيهما.



ن̂ ≅ م̂ ، أ̂ ≅ ل̂ ، جـ̂ ≅ ن̂

أجـ ≅ ل م ، ب جـ ≅ م ن ، أ ب ≅ ل ن

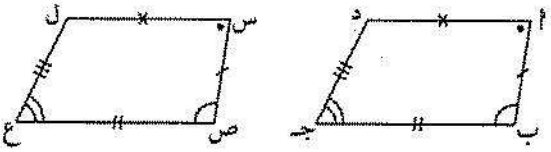
Δ أ ب جـ ≅ Δ ل م ن

(٣) إذا كان Δ أ ب جـ ≅ Δ س ص ع ، فحدّد العناصر المتطابقة فيهما .

أ̂ ≅ س̂ ، ب̂ ≅ ص̂ ، جـ̂ ≅ ع̂

أ ب ≅ س ص ، ب جـ ≅ ص ع ، أ جـ ≅ س ع

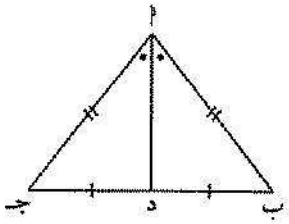
(٤) في الشكل المقابل أ ب جـ د ، س ص ع ل شكلين رباعيين متطابقين



أكمِل ما يلي حسب الشروط المعطاة :

١ أ ≅ س	ب ب ≅ ص
جـ جـ ≅ ع	د د ≅ ل
هـ $\overline{أب}$ ≅ $\overline{سص}$	و $\overline{بجـ}$ ≅ $\overline{صع}$
ز $\overline{جـد}$ ≅ $\overline{عل}$	ح $\overline{د أ}$ ≅ $\overline{ل س}$

(٥) في الشكل المقابل : Δ أ ب جـ وبحسب الشروط المعطاة أكمل ما يلي :



١ $\overline{أب}$ ≅ $\overline{أجـ}$

ب $\overline{بد}$ ≅ $\overline{جـد}$

جـ $\overline{أد}$ (ضلع مشترك)

د ب أ د ≅ د أ جـ

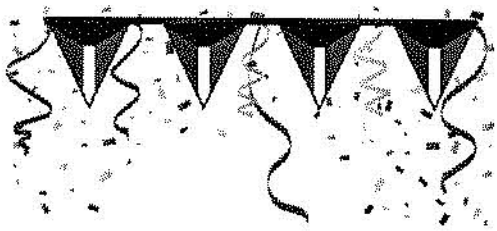
هـ ب ≅ جـ

و أ د ب ≅ أ د جـ (قائمة)

٤-٢ الحالة الأولى : تطابق مثلّثين بثلاثة أضلاع
Congruent Triangles with SSS

العبارات والمفردات :
رمز التطابق (≅)
Congruency Symbol (≅)
ضلع : (ض) S : Side
زاوية (ز) A : Angle
تطابق مثلّثين بثلاثة أضلاع
Congruency Triangles with 3 Corresponding Sides .

سوف تتعلّم : تطابق مثلّثين بثلاثة أضلاع .

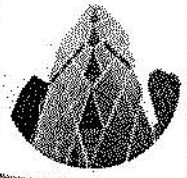


في شهر فبراير ، تتزيّن دولة الكويت بأعلامها الجميلة ذات الأشكال المتنوّعة .
في الصورة المقابِلة أحد هذه الأشكال .

نشاط

المجموعة الأولى	المجموعة الثانية
مثلث أ ب جـ	مثلث د هـ و
أ ب = ٧ سم	د هـ = ٦ سم
ب جـ = ٦ سم	هـ و = ٥ سم
أ جـ = ٥ سم	د و = ٧ سم

معلومات مفيدة :
يستخدم مصمّمو الواجهات الزجاجية الملوّنة المثلّثات المتطابقة في الإنشاءات .



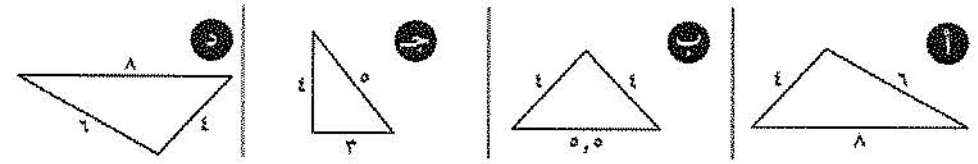
١ كل مجموعة ترسم المثلث المطلوب منها .
٢ يطابق أعضاء المجموعة المثلثات التي تم رسمها .
٣ تطابق المجموعة الأولى مع المجموعة الثانية المثلثات المرسومة .

ماذا تلاحظ ؟ أطوال الأضلاع المتناظرة متطابقة

اللوازم :
- ورق شفّاف
- مسطرة
- فرجار

يتطابق المثلّثان إذا تطابق كلّ ضلع في المثلّث الأوّل مع نظيره في المثلّث الثاني .
يُعبَّر عن ذلك بحالة (ضلع ، ضلع ، ضلع) ويرمز إليها (ض . ض . ض)

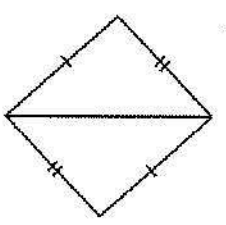
تدرّب (١) ،
عيِّن المثلّثات المتطابقة في ما يلي :



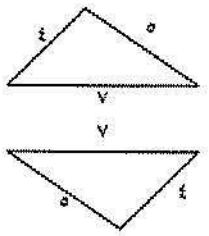
أ ، د

تدرّب (٢) :

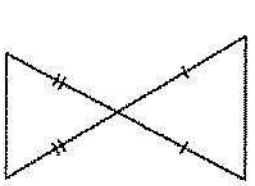
هل المثلّثان في كلّ من الأشكال التالية متطابقان ؟ ولماذا ؟



متطابقة



متطابقة



غير متطابقة

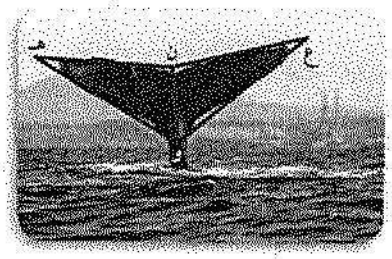
اعتبر أن الأضلاع لها نفس وحدة الطول أينما وجد.

مثال :

يبدو ذيل الحوت القاتل على شكل مثلّثين بينهما ضلع مشترك إذا عُلِم أنّ :

$\overline{ع ن} \cong \overline{هـ ن}$ ، $\overline{ع و} \cong \overline{هـ و}$ ، $ق(\hat{ع}) = ٥٠°$

فأثبِت أنّ $\Delta ع ن و \cong \Delta هـ ن و$ ، ثمّ أوجد $ق(\hat{هـ})$



الحلّ :

المعطيات :

$\overline{ع ن} \cong \overline{هـ ن}$ ، $\overline{ع و} \cong \overline{هـ و}$ ، $ق(\hat{ع}) = ٥٠°$

المطلوب :

(١) إثبات أنّ : $\Delta ع ن و \cong \Delta هـ ن و$ ، (٢) إيجاد $ق(\hat{هـ})$

ملاحظة :
∴ تعني إذًا
∵ تعني بما أن

البرهان :

في $\Delta ع ن و$ ، $\Delta هـ ن و$:

(١) $\overline{ع ن} \cong \overline{هـ ن}$ (معطى)

(٢) ع و = هـ و (معطى)

(٣) $\overline{ن و}$ (ضلع مشترك)

$\Leftarrow$ بحالة (ض . ض . ض)

∴ $\Delta ع ن و \cong \Delta هـ ن و$

وينتج أنّ $ق(\hat{هـ}) = ق(\hat{ع}) = ٥٠°$

لاحِظ أنّ : عند إثبات تطابق مثلّثين نحتاج إلى إثبات تطابق ثلاثة عناصر مثل (ض . ض . ض) ونستنتج بعد ذلك تطابق الثلاثة عناصر الباقية (الزوايا الثلاث).

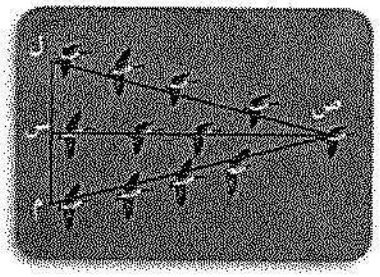
تدرّب (٣) :

يطير سرب من الإوزّ مشكّلًا الرسم الذي في الصورة المجاورة .

إذا عُلِم أنّ : $\overline{\text{ص م}} \cong \overline{\text{ص ل}}$ ، س منتصف $\overline{\text{م ل}}$

فأثبت أنّ : (١) Δ ص م س $\cong \Delta$ ص ل س

(٢) $\overline{\text{ص س}}$ ينصف (ل $\hat{\text{ص}}$ م)



المعطيات :

(١) $\overline{\text{ص م}} \cong$ ..... $\overline{\text{ص ل}}$ .....

(٢) ..... س ..... منتصف ..... $\overline{\text{ل م}}$ .....

المطلوب :

إثبات أنّ :(١) Δ ص م س $\cong \Delta$ ص ل س

(٢) $\overline{\text{ص س}}$ منصف (ل $\hat{\text{ص}}$ م)

البرهان :

Δ ص س ل ، Δ ص س م فيهما :

(١) $\overline{\text{ص م}} \cong$ ..... $\overline{\text{ص ل}}$ ..... (معطى)

(٢) $\overline{\text{ل س}} \cong$ ..... $\overline{\text{س م}}$ ..... (..... س ..... منتصف ..... $\overline{\text{ل م}}$ .....)

(٣) ..... $\overline{\text{ص س}}$ ..... (ضلع مشترك)

$\therefore \Delta$ ص س ل $\cong$ ..... ص س م ..... بحالة (..... ض ..... ض ..... ض .....)

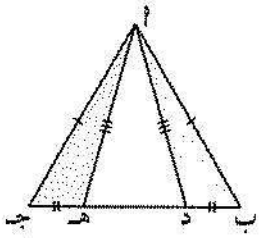
وينتج من التطابق أنّ ق (م $\hat{\text{ص}}$ س) = ق (..... س ص ل .....)

$\therefore$ $\overline{\text{ص س}}$ ينصف (ل $\hat{\text{ص}}$ م)

فكر وناقش

هل كلّ المثلّثات المتطابقة الأضلاع متطابقة ؟ فسّر ذلك .

تمـــرّنْ :



١ في الشكل المقابل :

المعطيات :- $\overline{أب} \cong \overline{أجـ}$ ، $\overline{أد} \cong \overline{أهـ}$ ، $\overline{بد} \cong \overline{جهـ}$

المطلوب :- أثبت أنّ : (١) Δ أبد $\cong \Delta$ أجهـ

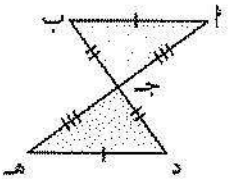
(٢) $\angle$ب أ د $\cong \angle$جـ أ هـ

البرهان :- Δ أبد ، Δ أجهـ فيهما :

(١) $\overline{أب} \cong \overline{أجـ}$ (٢) $\overline{أد} \cong \overline{أهـ}$ (٣) $\overline{بد} \cong \overline{جهـ}$

$\therefore \Delta$ أبد $\cong \Delta$ أجهـ وينتج من التطابق أن

$\angle$ب أ د $\cong \angle$جـ أ هـ



٢ في الشكل المقابل :

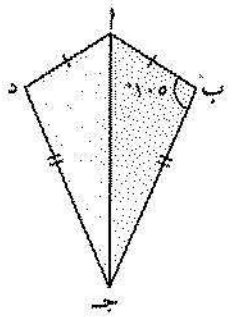
المعطيات :- $\overline{أب} \cong \overline{هـد}$ ، $\overline{دجـ} \cong \overline{بجـ}$ ، $\overline{أجـ} \cong \overline{هـجـ}$

المطلوب :- أثبت أنّ : Δ أبجـ $\cong \Delta$ هـدجـ

البرهان :- Δ أبجـ ، Δ هـدجـ فيهما :

(١) $\overline{أب} \cong \overline{هـد}$ ، $\overline{دجـ} \cong \overline{بجـ}$ ، $\overline{أجـ} \cong \overline{هـجـ}$

$\therefore \Delta$ أبجـ $\cong \Delta$ هـدجـ



٣ الشكل المقابل أبجـد شكل رباعي فيه

المعطيات :- أب = أد ، بجـ = دجـ ، ق($\angle$أبجـ) = ١٠٥°

المطلوب :- أثبت أنّ : (١) Δ أبجـ $\cong \Delta$ أدجـ

(٢) ق($\angle$أدجـ) = ١٠٥°

(٣) $\overline{أجـ}$ منصف ($\angle$ب أ د)

البرهان :- Δ أبجـ ، Δ أدجـ فيهما

(١) $\overline{أب} \cong \overline{أد}$ (٢) $\overline{بجـ} \cong \overline{دجـ}$ (٣) $\overline{أجـ}$ ضلع مشترك

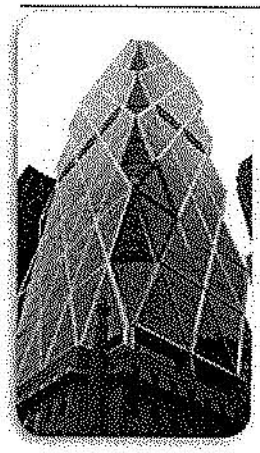
$\therefore \Delta$ أبجـ $\cong \Delta$ أدجـ وينتج من التطابق أن

ق($\angle$أبجـ) = ق($\angle$أدجـ) = ١٠٥° ، $\overline{أجـ}$ منصف ($\angle$ب أ د)

٤-٣ الحالة الثانية : تطابق مثلّثين بضلعين والزاوية المحدّدة بهما
Congruency Triangles with SAS

سوف تتعلّم: تطابق مثلّثين بضلعين والزاوية المحدَّدة بهما .

المعلومات المفيدة:
يستخدم النجّارون الكثير من المثلّثات المتطابقة في تنفيذ الديكور .



نشاط

تمثّل المباني الحديثة جزءًا مهمًّا من الفنّ المعماري ، ويتمّ تصميم بعض واجهات المباني على شكل مثلّثات متطابقة كما في الصورة المجاورة .

المثلّث	طول الضلع الأوّل	قياس الزاوية	طول الضلع الثاني
ا ب جـ	ا ب = ٧ سم	ق ($\hat{ب}$) = ٨٠°	ب جـ = ٩ سم
س ص ع	س ص = ٨ سم	ق ($\hat{ص}$) = ١٤٠°	ص ع = ٦ سم

اللوازم :
- ورق شفاف
- مسطرة
- منقلة
- فرجار

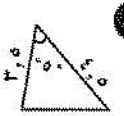
١ كلّ مجموعة تقوم برسم المثلّثين في الجدول أعلاه .

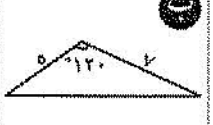
٢ على كلّ مجموعتين العمل معًا لمطابقة المثلّثات في ما بينها ، ماذا تلاحظ ؟

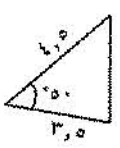
يتطابق المثلّثان إذا تطابق ضلعان والزاوية المحدَّدة بهما في أحد المثلّثين مع نظائرها في المثلّث الآخر . يُعبَّر عن ذلك (ضلع ، زاوية ، ضلع) ويرمز إليها (ض . ز . ض)

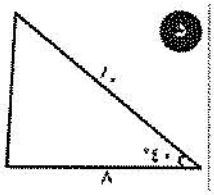
تدرّب (١) ،

عيّن المثلّثات المتطابقة في ما يلي :

١ 

ب 

جـ 

د 

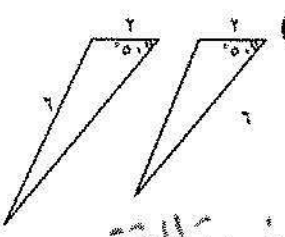
هـ

م ، جـ ب ، د

تدرّب (٢) :

هل المثلّثان في الأشكال التالية متطابقان ؟

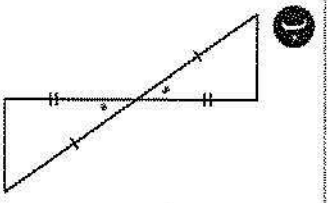
أ



غير متطابقة

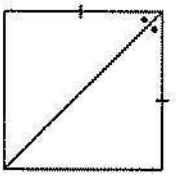
لأن الزاوية غير محصورة بالضلعين

ب



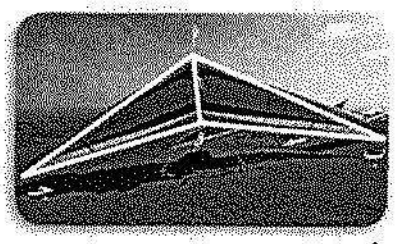
متطابقان

جـ



متطابقان

مثال :



يبدو جناحا الطائرة الشراعية في الصورة المجاورة أنّهما مثلّثان متطابقان .

إذا كان $\overline{أب} \cong \overline{أجـ}$ ، $\overline{أو}$ منصّف زاوية الرأس $ب\hat{أ}جـ$ ،

فهل المعطَيات في الرسم كافية ليصبح المثلّثان متطابقين . أثبِت صحّة ذلك .

الحلّ :

المعطيات :

(١) $\overline{أب} \cong \overline{أجـ}$ ، (٢) $\overline{أو}$ منصّف $(ب\hat{أ}جـ)$

المطلوب :

إثبات أنّ : Δ ب أ و $\cong \Delta$ جـ أ و

البرهان :

Δ ب أ و ، Δ جـ أ و فيهما :

(١) $\overline{أب} \cong \overline{أجـ}$ (معطى)

(٢) ق $(ب\hat{أ}و)$ = ق $(جـ\hat{أ}و)$ ($\overline{أو}$ منصّف زاوية الرأس $(ب\hat{أ}جـ)$)

(٣) $\overline{أو}$ (ضلع مشترك)

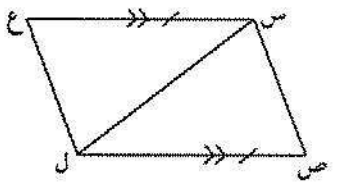
∴ Δ ب أ و $\cong \Delta$ جـ أ و حالة (ض . ز . ض)

∴ نعم المعطَيات كافية لإثبات الحالة .

تذكّرْ أنّ :

- // رمز التوازي
- إذا توازى مستقيمان وقطعهما قاطع ، فإنّ :
  - الزوايا المتبادلة متطابقة .
  - الزوايا المتناظرة متطابقة .
  - الزوايا الداخلة متكاملة .

تدرّب (٣) :



في الشكل المقابل

$\overline{س ع} \cong \overline{ص ل}$ ، $\overline{س ع} \parallel \overline{ص ل}$.

أثبت أنّ : (١) Δ ل س ع $\cong \Delta$ س ل ص

(٢) س ص = ع ل

المعطيات :

(١) $\overline{س ع} \cong \overline{ص ل}$ ، (٢) $\overline{س ع} \parallel \overline{ص ل}$

المطلوب :

إثبات أنّ : (١) Δ س ل ص $\cong \Delta$ ل س ع ، (٢) س ص = ع ل

البرهان :

Δ ل س ع ، Δ س ل ص فيهما :

(١) $\overline{س ع} \cong \overline{ص ل}$ ..... (معطى)

(٢) ق (ل $\hat{س}$ ع) = ق (س $\hat{ل}$ ص) (بالتبادل)

(٣) $\overline{س ل}$ ..... (ضلع مشترك)

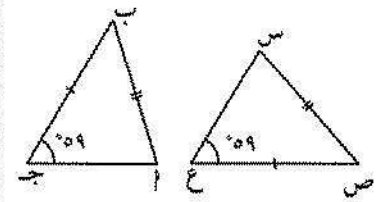
∴ أنّ Δ ل س ع $\cong \Delta$ س ل ص بحالة (ض . ز . ض)

وينتج من التطابق أنّ س ص = ع ل

فكّر وناقش

قال أحمد إنّ Δ س ص ع $\cong \Delta$ أ ب جـ بحالة (ض . ز . ض)

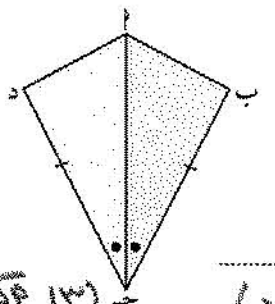
وقال خالد إنّ المعلومات غير كافية لبيان أنّ المثلّثين متطابقان .



أيّهما على صواب ؟ فسّر ذلك . خالد ـ لأن الزاويتين غير محصورتين بين الضلعين

تمـــرّنْ :

(١) في الشكل المجاور :



المعطيات :- ق (اجْب) = ق (اجْد) ، $\overline{ب جـ} \cong \overline{د جـ}$

المطلوب :- **ا** أثبت أنّ: Δ ا ب جـ $\cong \Delta$ ا د جـ .

ب برهن أنّ $\hat{ا ب جـ} \cong \hat{ا د جـ}$.

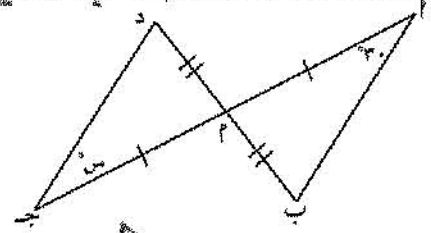
البرهان :- Δ ا ب جـ ، Δ ا د جـ فيهما

(١) $\overline{ب جـ} \cong \overline{د جـ}$ (٢) ق($\hat{ا ج ب}$) = ق($\hat{ا ج د}$)

(٣) $\overline{ا جـ}$ ضلع مشترك

$\therefore$ Δ ا ب جـ $\cong \Delta$ ا د جـ ، ينتج من التطابق ا ق($\hat{ا ب جـ}$) $\cong$ ق($\hat{ا د جـ}$)

(٢) من خلال المعطيات على الشكل المقابل .



ا أثبت أنّ: Δ ا م ب $\cong \Delta$ جـ م د .

ب أوجد قيمة س .

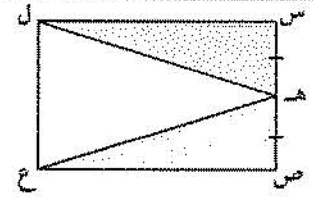
البرهان: Δ ا م ب ، Δ جـ م د فيهما :

(١) ا م = م جـ (٢) ب م = م د (٣) ق($\hat{ا م ب}$) = ق($\hat{جـ م د}$) بالتقابل بالرأس

$\therefore$ Δ ا م ب $\cong \Delta$ جـ م د ، ينتج من التطابق ق($\hat{ب ا م}$) = ق($\hat{م جـ د}$)

أي أنّ س = ٣٠°

(٣) في الشكل المقابل :



المعطيات :- س ص ع ل مستطيل ، هـ منتصف $\overline{س ص}$

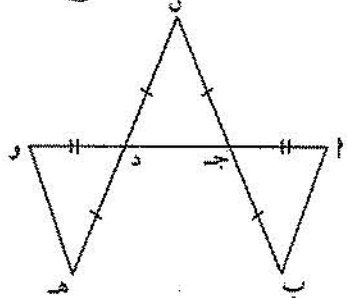
المطلوب :- أثبت أنّ : هـ ل = هـ ع

Δ س ل هـ ، Δ ص ع هـ فيهما :

(١) س هـ = هـ ص (٢) س ل = ص ع (٣) ق($\hat{هـ س ل}$) = ق($\hat{هـ ص ع}$) = ٩٠°

$\therefore$ Δ س ل هـ $\cong \Delta$ ص ع هـ ، ينتج من التطابق هـ ل = هـ ع

(٤) في الشكل المجاور :



المعطيات :- جـ منتصف $\overline{ن ب}$ ، د منتصف $\overline{ن هـ}$

$\overline{ن جـ} \cong \overline{ن د}$ ، $\overline{ا جـ} \cong \overline{و د}$

طول $\overline{ب ا}$ = ١٢ سم

المطلوب :- **ا** أثبت أنّ :Δ ا ب جـ $\cong \Delta$ و هـ د .

ب أوجد طول $\overline{هـ و}$.

ق($\hat{ا ج ب}$) = ق($\hat{ن ج د}$) ، ق($\hat{هـ د و}$) = ق($\hat{ن د ج}$) بالتقابل بالرأس

Δ ن جـ د متطابق الضلعين ، ق($\hat{ن ج د}$) = ق($\hat{ن د ج}$) (٥)

من (١) ، (٤) Δ ا جـ ب $\cong \Delta$ و د هـ بحالة (ض ، ز ، ض)

ينتج أن $\overline{هـ و} = \overline{ب ا}$

٤-٤ الحالة الثالثة : تطابق مثلّثين بزاويتين وضلع واصل بين رأسيهما
Congruent Triangle with ASA

سوف تتعلّم: تطابق مثلّثين بتطابق زاويتين وضلع واصل بين رأسيهما .

نشاط (١) :

أُرسُم المثلّثات التالية وفقًا للمعلومات المعطاة في الجدول الموضّح :

	المثلّث	طول الضلع	قياس الزاوية (١)	قياس الزاوية (٢)
١	ا ب جـ	ا ب = ٦ سم	ق ($\hat{ا}$) = ٦٠°	ق ($\hat{ب}$) = ٧٠°
٢	س ص ع	س ص = ٧ سم	ق ($\hat{س}$) = ٦٠°	ق ($\hat{ص}$) = ٧٠°
٣	ل م ن	ل م = ٦ سم	ق ($\hat{ل}$) = ٦٠°	ق ($\hat{م}$) = ٧٠°

اللوازم :
- ورق شفاف
- أدوات هندسية

(١) أيّ المثلّثات المرسومة متطابقة ؟ ..... ا ب جـ ، ل م ن

(٢) حدِّد الشروط المتوفّرة في المثلّثات المتطابقة ؟

..... زاويتين وضلع واصل بين رأسيهما .....

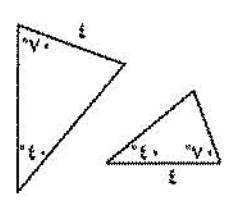
تذكّر أنّ :
المثلّثين يتطابقان بحالة
(١) (ض . ض . ض)
(٢) (ض . ز . ض)

يتطابق المثلّثان إذا تطابقت زاويتان والضلع الواصل بين رأسيهما في أحد المثلّثين مع نظائرهما في المثلّث الآخر ، ويُعبَّر عن ذلك بحالة (زاوية ، ضلع ، زاوية) ويرمز إليها (ز . ض . ز) .

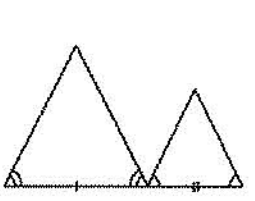
تدرّب (١) :

هل المثلّثان في كلّ من (أ) ، (ب) ، (جـ) متطابقان ؟ فسّر ذلك .

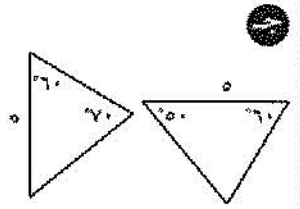
(أ)



(ب)



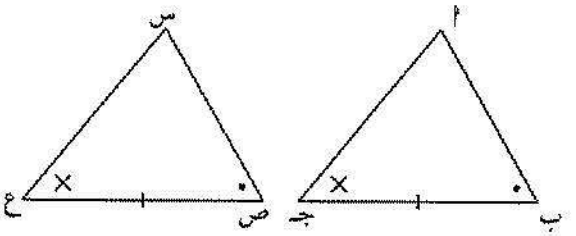
(جـ)



(أ) لا ..... (ب) نعم .....

تدرّب (٢) :

من المعطَيات الموضّحة في الرسم ، أكمِل كلًّا ممّا يلي :



في Δ أ ب جـ ، Δ س ص ع

(١) ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{ص}$)

(٢) ق ($\hat{جـ}$) = ق ($\hat{ع}$)

(٣) ب جـ = ص ع

∴ يتطابق المثلثان بحالة (ز . ص . ز)

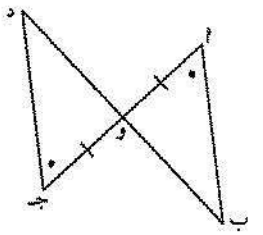
ينتج من التطابق أن ق ($\hat{أ}$) = ق ($\hat{س}$) ، $\overline{س ص} \cong \overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ} \cong \overline{س ع}$

تذكّر أنّ :
- الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة .
- عندما يتوازى مستقيمان فإنّ:
  - كلّ زاويتين متبادلتين متطابقتان .
  - كلّ زاويتين متناظرتين متطابقتان .

تدرّب (٣) :

في الشكل المقابِل :

أثبِت أنّ : Δ أ ب و ≅ Δ جـ د و



المعطَيات :

(١) $\overline{أ و} \cong \overline{و جـ}$

(٢) $\hat{أ} \cong \hat{جـ}$

المطلوب :

إثبات أنّ : Δ أ ب و ≅ Δ و د جـ

البرهان :

في Δ أ ب و ، Δ و د جـ فيهما :

(١) ق ($\hat{أ}$) = ق ($\hat{جـ}$) (معطى)

(٢) أ و = و جـ (معطى)

(٣) ق (أ $\hat{و}$ ب) = ق (جـ $\hat{و}$ د) (تقابل بالرأس)

∴ يتطابق Δ أ ب و ، Δ جـ د و بحالة (ز . ص . ز)

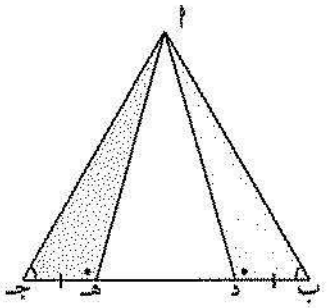
فكر وناقش

إذا تطابقت ثلاث زوايا في أحد المثلّثين مع نظائرها في المثلّث الآخر ،
فهل يتطابق المثلّثان ؟
أُرسُم مثلّثين لدعم إجابتك .

تذكّرْ أنّ :
في Δ متطابق الضلعين
زاويتا القاعدة متطابقة .

تدرّب (٤) :

في الشكل المقابِل :



أثبت أنّ :

(١) Δ ا ب د ≅ Δ ا جـ هـ

(٢) ا ب = ا جـ

المعطيات : (١) $\overline{ب د} \cong \overline{\text{هـ جـ}}$ ،

(٢) ق (ا $\hat{د}$ ب) = ق (ا $\hat{هـ}$ جـ) ، (٣) ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{جـ}$)

المطلوب :

إثبات أنّ :

(١) Δ ا ب د ≅ Δ ا هـ د ، (٢) ا ب ≅ ا جـ

البرهان :

Δ ا ب د ، Δ ا هـ د فيهما :

(١) $\overline{ب د} \cong \overline{\text{هـ د}}$ (معطى)

(٢) ق (ا $\hat{د}$ ب) = ق (ا $\hat{د}$ هـ) (معطى)

(٣) ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{جـ}$) (معطى)

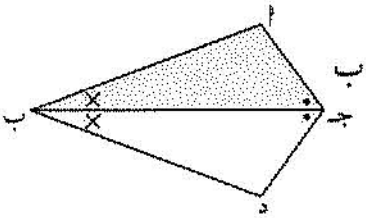
∴ يتطابق المثلثان بحالة (ز ، ض ، ز)

∴ ينتج أن ا ب ≅ ا جـ

فكر وناقش

هل يتطابق ضلعان في مثلث إذا تطابقت زوايا القاعدة منه ؟ فسر إجابتك .

تمـــرَّنْ :



١ في الشكل المقابِل ليكن $\overline{جـ ب}$ منصِّف الزاويتين جـ ، ب

(١) أثبت أنَّ Δ ا جـ ب $\cong \Delta$ د جـ ب .

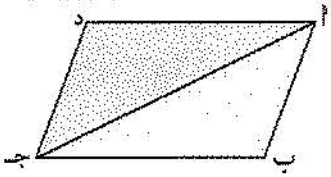
(٢) برهِن أنَّ ا جـ = د جـ .

البرهان : في Δ ا ب جـ ، Δ د ب جـ فيهما

(١) $م(\angle ا ب جـ) = م(\angle ب جـ د)$ (٢) $م(\angle ا ب جـ) = م(\angle ب جـ د)$ معطى

(٣) ب جـ ضلع مشترك $\therefore \Delta$ ا ب جـ $\cong \Delta$ د ب جـ وينتج أن

ا جـ = د جـ



٢ ا ب جـ د متوازي أضلاع . وظِّف حالة التطابق (زاويتان وضلع واصل بين رأسيهما) لإثبات تطابق Δ ا ب جـ ، Δ جـ د ا .

البرهان : في الشكل ا ب جـ د متوازي أضلاع ، $\overline{اجـ}$ قاطع فيه

$\therefore \overline{اجـ}$ ينصف كلاً من $\angle ا$ ، $\angle جـ$

في Δ ا د جـ ، Δ ا ب جـ فيهما :

(١) $م(\angle ب ا جـ) = م(\angle ا جـ د)$ (٢) $م(\angle ا ب جـ) = م(\angle ا د جـ)$

(٣) $\overline{اجـ}$ ضلع مشترك $\therefore \Delta$ ا ب جـ $\cong \Delta$ جـ د ا بالطرفية (ز ض ز)

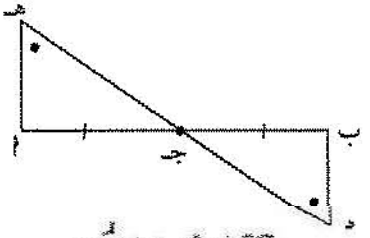
تذكر أنّ :
إذا تطابقت زاويتان في مثلث مع نظائرهما في المثلث الآخر ، فإن الزاوية الثالثة فيهما تكون متطابقة. (لأن مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي ١٨٠°)

٣ في الشكل المقابل جـ منتصف $\overline{اب}$ ،

$م(\angle د) = م(\angle هـ)$

أثبِت أنّ : (١) Δ ب د جـ $\cong \Delta$ ا هـ جـ

(٢) $\overline{اهـ} \cong \overline{بد}$.



البرهان : $\because م(\angle ب جـ د) = م(\angle هـ جـ ا)$ تقابل بالرأس

$م(\angle د) = م(\angle هـ)$

$\therefore م(\angle ب جـ د) = م(\angle هـ ا جـ)$ (مجموع قياسات المثلث ١٨٠°)

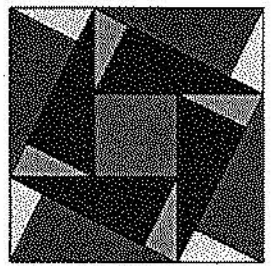
في Δ ب د جـ ، Δ هـ ا جـ فيهما :

(١) $م(\angle د ب جـ) = م(\angle هـ ا جـ)$ (٢) $م(\angle ب جـ د) = م(\angle ا جـ هـ)$

(٣) ب جـ = جـ ا $\therefore \Delta$ ب د جـ $\cong \Delta$ هـ ا جـ (ز ض ز)

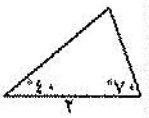
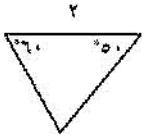
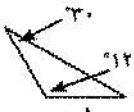
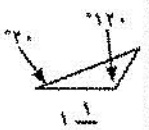
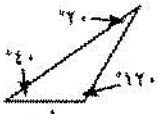
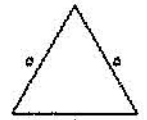
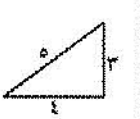
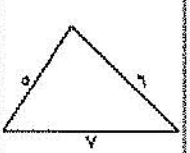
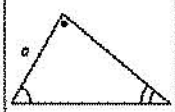
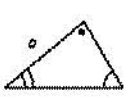
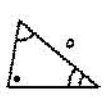
$\therefore \overline{اهـ} \cong \overline{بد}$

٤-٥ تطبيقات على تطابق المثلّثات
Congruent Triangles



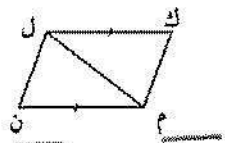
نشاط :

أراد مبارك عمل لوحة فنّية باستخدام المثلّثات . وبعد أن اكتملت اللوحة بلصق مثلّثات معيَّنة وأثناء النقل ، سقطت بعض المثلّثات ، فحاول رسم مثلّثات تطابق المثلّثات المفقودة من اللوحة . **ساعِد مبارك على الوصول إلى المثلّثات التي يحتاج إليها بإكمال الجدول .**

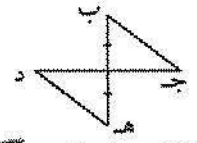
القطعة المثلثة المفقودة	الأنواع ١	٢	٣	رقم القطعة المتطابقة مع حالة التطابق
١				رقم (٣) (ز . هـ . ز)
ب				رقم (١) (ز . هـ . ز)
جـ				رقم (٣) (هـ . هـ . هـ)
٥				رقم (٣) (ز . هـ . ز)

تدرّب (١) :

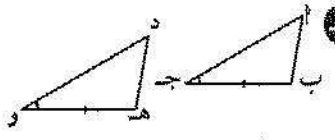
ما المعلومة الإضافية التي تحتاج إليها لإثبات أنّ المثلّثين في الأشكال التالية متطابقان ؟

أ) 

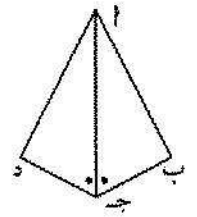
ل ك // م ن

ب) 

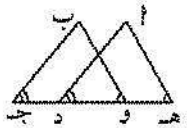
ب هـ ينصف جـ د

جـ) 

أ جـ = د هـ

د) 

ب د = جـ د

هـ) 

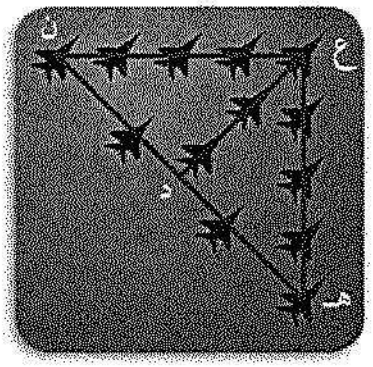
و د = و جـ

تدرّب (٢) :

شكّلت الطائرات في العرض الذي أُقيم للطائرات النفّاثة سربًا على شكل مثلّثين .

إذا عُلِم أنّ ع هـ ≅ ع ن ، د منتصف هـ ن .

أثبت أنّ : Δ ع د هـ ≅ Δ ع د ن



المعطيات :

ع هـ ≅ ع ن ، د منتصف هـ ن

المطلوب :

إثبات أنّ Δ ع د هـ ≅ Δ ع د ن

البرهان :

Δ ع د هـ ، Δ ع د ن فيهما :

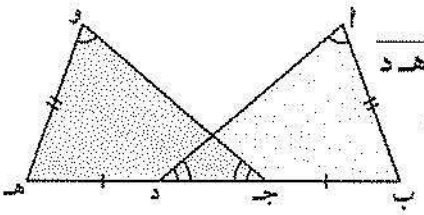
(١) ع هـ ≅ ع ن (معطى)

(٢) ع د (ضلع مشترك)

(٣) هـ د ≅ د ن (معطى)

∴ نستنتج أنّ Δ ع د هـ ≅ Δ ع د ن ⟸ بحالة (هـ ن . هـ ن . هـ ن)

تدرّب (٣) :



في الشكل المقابل : $\overline{اب} \cong \overline{وهـ}$ ، $\overline{بجـ} \cong \overline{هـد}$

$ق(\hat{ا}) = ق(\hat{و})$ ، $ق(\hat{وجـهـ}) = ق(\hat{اد ب})$

أثبت أنّ : $\overline{اد} \cong \overline{وجـ}$

مُلاحظة:
خاصية المساواة :
لكل ا ، ب ، جـ ≠ ٠ ،
إذا كان ا = ب
فإن : ا + جـ = ب + جـ

المعطيات : $\overline{اب} \cong \overline{وهـ}$ ، $\overline{بجـ} \cong \overline{هـد}$

$ق(\hat{ا}) \cong ق(\hat{و})$ ، $ق(\hat{وجـهـ}) = ق(\hat{اد ب})$

المطلوب : إثبات أنّ : $\overline{اد} \cong \overline{وجـ}$

$\overline{بجـ} \cong \overline{دهـ}$

$(\overline{بجـ} + \overline{جـد}) \cong (\overline{دهـ} + \overline{جـد})$

$\overline{بد} \cong \overline{جـهـ}$

البرهان :

Δ اب د ، Δ وجـهـ فيهما :

(١) $\overline{اب} \cong \overline{وهـ}$ (معطى)

(٢) $\overline{بد} \cong \overline{جـهـ}$ (برهان)

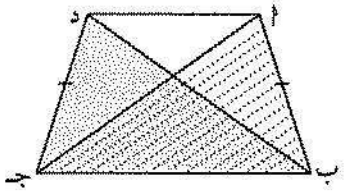
(٣) $ق(\hat{ب}) = ق(\hat{هـ})$ (ضلعان والمثلث)

$\therefore \Delta$ اب د $\cong \Delta$ وجـهـ (ض.ز.ض)

وينتج أنّ $\overline{اد} \cong \overline{وجـ}$

تمـــرّنْ :

١ اب جـ د شبه منحرف متطابق الضلعين .
أثبت أنّ : Δ اب جـ $\cong \Delta$ د جـ ب
(علمًا بأنّ قطري شبه المنحرف المتطابق الضلعين متطابقان)



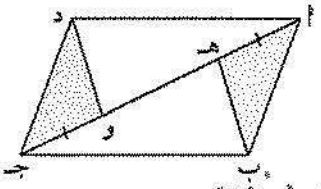
المعطيات : $\overline{اب} = \overline{دجـ}$ ، $\overline{اجـ} = \overline{بد}$

المطلوب : Δ اب جـ $\cong \Delta$ د جـ ب

البرهان : Δ اب جـ ، Δ د جـ ب فيهما :

(١) $\overline{اب} = \overline{دجـ}$ (٢) $\overline{بجـ}$ ضلع مشترك (٣) $\overline{اجـ} = \overline{بد}$

$\therefore \Delta$ اب جـ $\cong \Delta$ د جـ ب (ض.ض.ض)



(١٢) في الشكل المقابل :
ا ب جـ د متوازي أضلاع ، $\overline{ا جـ}$ قطر فيه ،
ا هـ = جـ و . أثبت أنّ ب هـ = د و

المعطيات : ا هـ = جـ و ، ا ب جـ د متوازي أضلاع
$\overline{ا جـ}$ قطر فيه

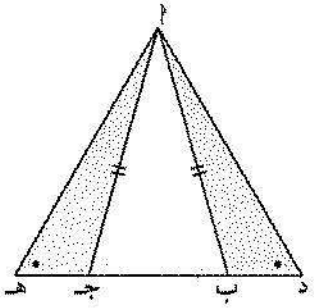
المطلوب : ب هـ = د و

البرهان : في △ ا ب هـ ، △ جـ د و فيهما :

(١) ا هـ = و جـ	(معطى)
(٢) ا ب = د جـ	(لأنهما متوازي الأضلاع)
(٣) ق(ب ا هـ) = ق(د جـ و)	(لأنهما متوازي الأضلاع)

∴ △ ا ب هـ ≅ △ جـ د و (ض . ز . ض)
ونتج أن ب هـ = د و

ملاحظة :
مكملات الزوايا المتطابقة تكون متطابقة .



(١٣) في الشكل المقابل :
ا ب = ا جـ ، ق(ا $\hat{د}$ ب) = ق(ا $\hat{هـ}$ جـ)
أثبت أنّ : المثلثين ا ب د ، ا جـ هـ متطابقان .

المعطيات : (١) $\overline{ا ب} \cong \overline{ا جـ}$
(٢) ق(ا $\hat{د}$ ب) = ق(ا $\hat{هـ}$ جـ)

المطلوب : إثبات أنّ : △ ا ب د ≅ △ ا جـ هـ

البرهان : △ ا ب جـ متطابق الضلعين ∴ ق(ا $\hat{ب}$ جـ) = ق(ا $\hat{جـ}$ ب)
∵ مكملات الزوايا متطابقة ∴ ق(ا $\hat{ب}$ د) = ق(ا $\hat{جـ}$ هـ)
∵ مجموع قياسات زوايا المثلث = ١٨٠° ∴ ق(د ا $\hat{ب}$) = ق(هـ ا $\hat{جـ}$) — (١)
∵ ق(ا $\hat{د}$ ب) = ق(ا $\hat{هـ}$ جـ) ∴ ا د = ا هـ — (٢)
△ ا ب د ، △ ا جـ هـ فيهما :
(١) ا د = ا هـ (البرهان ٢)
(٢) ا ب = ا جـ (معطى)
(٣) ق(د ا $\hat{ب}$) = ق(جـ ا $\hat{هـ}$) (البرهان ١)
∴ △ ا ب د ≅ △ ا جـ هـ (ض . ز . ض)

٤-٦ تطابق مثلثين قائمي الزاوية بضلع ووتر
Congruency of Two Right Triangles (HL)

سوف تتعلّم: تطابق مثلّثين قائمي الزاوية بتطابق وتر وأحد ضلعي القائمة .

العبارات والمفردات :
زاوية قائمة
Right Angle
مثلّث قائم الزاوية
Right-Angled Triangle
وتر Hypotenuse
ضلع الزاوية القائمة
Leg

نشاط :

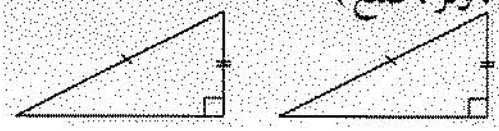
ارسم المثلثين القائمي الزاوية الآتيين وفقًا للمعلومات المعطاة في الجدول التالي :
ثمّ أجِب عن الأسئلة التالية :

المثلث	طول ضلع القائمة	طول الوتر
س ص ع	س ص = ٣ سم	س ع = ٥ سم
ا ب جـ	ا ب = ٤ سم	ا جـ = ٥ سم

١ هل يتطابق المثلثان المرسومان ؟ ..... نعم .....

٢ حدد الشروط المتوفرة في المثلثين المتطابقين . .....

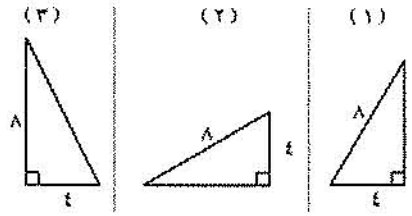
يتطابق مثلّثان قائما الزاوية إذا تطابق وتر وضلع في أحدهما مع نظائرهما في المثلّث الآخر ويعبر عن ذلك بحالة (زاوية قائمة ، وتر ، ضلع)
ويرمز إليها (△ . و . ض)



تذكّر أنّ :
لأيّ مثلّث ا ب جـ قائم الزاوية في ب
يكون $\overline{ا ب}$ ، $\overline{ب جـ}$ ضلعا القائمة ، $\overline{ا جـ}$ وتر المثلث .

تدرّب (١) :

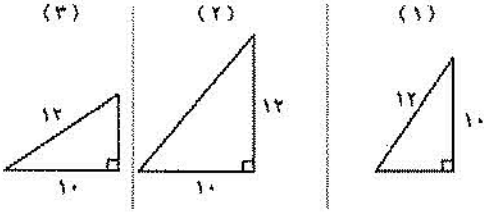
أكمل ما يلي لتصبح العبارة صحيحة :



أ المثلّث (١) ≅ المثلّث ..... (٢) .....
المثلّث (١) ≇ المثلّث ..... (٣) .....

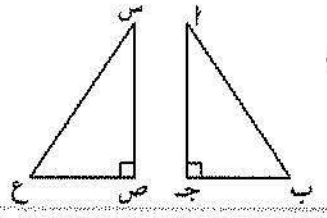
ملاحظة:
≇ تعني لا يتطابق

ب المثلّث (١) ≅ المثلّث ..... (٣) .....
المثلّث (١) ≇ المثلّث ..... (٤) .....



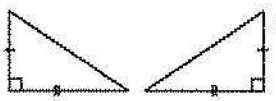
فكر وناقش

أمامك مثلّثان ، ما الحدّ الأدنى من المعلومات التي يمكن استخدامها لإثبات أن المثلّثين متطابقان ؟

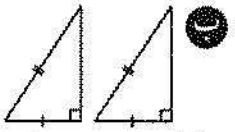


تدرّب (٢) :

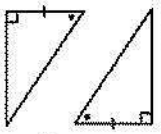
في كلّ من الأشكال التالية المثلّثان متطابقان ، حدِّد حالة التطابق :

أ 

(ض ، ل ، ض)

ب 

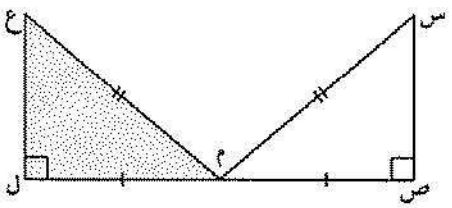
(∆ ، و ، ض)

جـ 

(ر ، ض ، ز)

تدرّب (٣) :

في الشكل المقابِل :



برهِن أنّ ∆ س ص م ≅ ∆ ع ل م

أكمِل ما يلي :

المعطَيات : (ص̂) ، (ل̂) زوايا قائمة

س م ≅ ع م

ص م ≅ ل م

المطلوب : إثبات أنّ ∆ س ص م ≅ ∆ ع ل م

البرهان :

∆ س ص م ، ∆ ع ل م فيهما :

(١) ق (ص̂) = ق (ل̂) = ٩٠° (معطى)

(٢) س م ≅ ع م (معطى)

(٣) ص م ≅ ل م (معطى)

∴ نستنتج أنّ ∆ س ص م ≅ ∆ ع ل م

⟸ وحالة التطابق هي (∆ ، و ، ض)

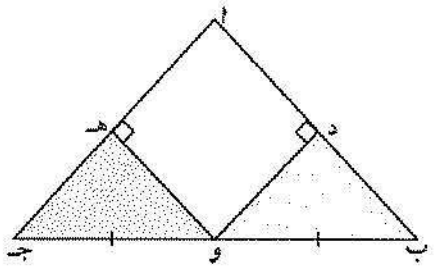
مثال :

في الشكل المقابِل :

أ د و هـ مربع ، ب و = جـ و

أثبِت أنّ (١) $\hat{ب} \cong \hat{جـ}$

(٢) Δ أ ب جـ متطابق الضلعين



تذكَّرْ أنّ :
من خواص المربّع
• زواياه الأربع قوائم
• أضلاعه الأربعة متطابقة .

الحل :

المعطيات : أ د و هـ مربّع ، ب و = جـ و

المطلوب : إثبات أنّ $\hat{ب} \cong \hat{جـ}$

البرهان : Δ د ب و ، Δ هـ جـ و فيهما :

(١) ب و = جـ و (معطى)

(٢) د و = هـ و (من خواص المربع)

(٣) ق (و $\hat{د}$ ب) = ق (و $\hat{هـ}$ جـ) = ٩٠° ⟸
ق (و $\hat{د}$ ب) = ٩٠° بالتجاور مع (أ $\hat{د}$ و)
ق (جـ $\hat{هـ}$ و) = ٩٠° بالتجاور مع (أ $\hat{هـ}$ و)

∴ Δ د ب و ≅ Δ هـ جـ و وحالة تطابقهما هي (∠ . و . ض)

مُلاحَظَةٌ:
في أي مثلث إذا تطابقت زاويتا القاعدة تطابق الضلعان المقابلان لهما .

وينتج من التطابق أن : $\hat{ب} \cong \hat{جـ}$ ..... (١)

∵ Δ أ ب جـ فيه :

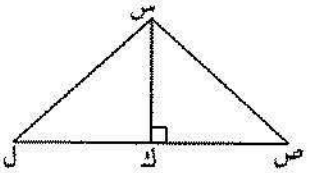
ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{جـ}$) (زاويتا القاعدة متطابقة)

∴ Δ أ ب جـ متطابق الضلعين ..... (٢)

تعميم : زاويتي القاعدة في مثلث متطابقتان ⟺ المثلث متطابق الضلعين

تذكّر أنّ :
- في المثلّث المتطابق الضلعين، القطعة المستقيمة المرسومة من رأس المثلّث والعمودية على القاعدة تنصّفها.
- من خواصّ المستطيل
• زواياه الأربع قوائم
• كلّ ضلعين متقابلين متطابقان
• القطران متطابقان . وينصف كلّ منهما الآخر .

فكر وناقش



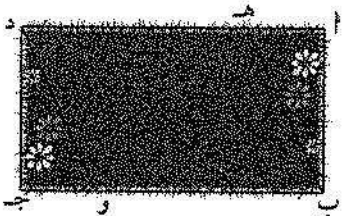
في Δ س ص ل ، $\overline{س ك} \perp \overline{ص ل}$

ما الحدّ الأدنى من المعلومات التي يمكن استخدامها لإثبات أن المثلّثين س ص ك ، س ل ك متطابقان .

تدرّب (٤) :

في الشكل المقابل مخطط لحديقة على شكل مستطيل ، يراد زراعة حوضين من الأزهار على شكل مثلثين . أثبت أنّ حوضي الزهور متطابقة موظفًا المعطيات الموجودة على الرسم .

أكمِل كلًّا ممّا يلي :



المعطيات : ا ب جـ د مستطيل ، $\overline{ب هـ} \cong \overline{د و}$

المطلوب : إثبات أن Δ ا ب هـ ≅ Δ جـ د و

البرهان : Δ ا ب هـ ، Δ جـ د و فيهما :

(١) ق ($\hat{ا}$) = ق ($\hat{ج}$) = ٩٠° من خواصّ المستطيل (زواياه الأربع قائمة)

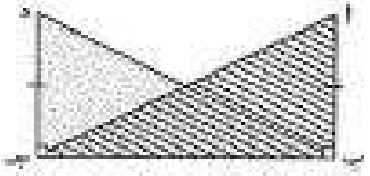
(٢) $\overline{ا ب} \cong \overline{جـ د}$ من خواصّ المستطيل (كلّ ضلعين متقابلين متطابقين)

(٣) $\overline{ب هـ} \cong \overline{د و}$ (معطى)

Δ ا ب هـ ≅ Δ جـ د و بحالة (ض . ق . ض)

ونستنتج أن الحوضان متطابقان .

تمرين :



❶ في الشكل المقابل : $\overline{أب} \perp \overline{بجـ}$ ،
$\overline{دجـ} \perp \overline{بجـ}$ ، $أجـ = بد$ ،
اثبت أن : $ب\hat{أ}جـ \equiv جـ\hat{د}ب$.

المعطيات : $\overline{أب} \perp \overline{بجـ}$ ، $\overline{دجـ} \perp \overline{بجـ}$ ، $أجـ = بد$

المطلوب : $ب\hat{أ}جـ \equiv جـ\hat{د}ب$

البرهان : $\overline{أب} \perp \overline{بجـ}$ ، $\overline{دجـ} \perp \overline{بجـ}$ ∴ $ق(أ\hat{ب}جـ) = ق(د\hat{جـ}ب) = 90°$

$\triangle أبجـ$ ، $\triangle بدجـ$ فيهما :

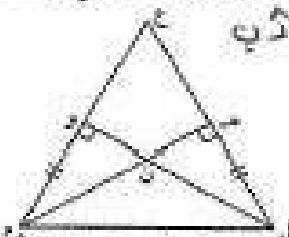
(١) $أب = جـد$ (معطى) (٢) $ق(أ\hat{ب}جـ) = ق(د\hat{جـ}ب)$ برهان

(٣) $بجـ$ مشترك ∴ $\triangle أبجـ \equiv \triangle بدجـ$ (هـ ، ز ، هـ)

ينتج أن $ب\hat{أ}جـ \equiv جـ\hat{د}ب$

❷ في الشكل المقابل :
اثبت أن : ❶ $\triangle لوم \equiv \triangle مهـ$

❷ $عل = عم$



المعطيات : $ق(ل\hat{وم}) = ق(ل\hat{هـم}) = 90°$

$لهـ = وم$

المطلوب : $\triangle لوم \equiv \triangle مهـل$

$عل = عم$

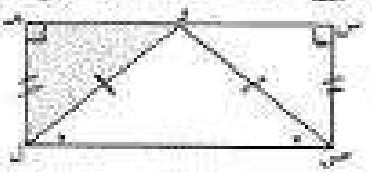
البرهان : $\triangle لوم$ ، $\triangle لهـم$ المثلثان الزاويتان فيهما

(١) $\overline{لم}$ وتر مشترك (وتر)

(٢) $لهـ = وم$ معطى

∴ $\triangle لهـم \equiv \triangle مول$ (ض و ف) ينتج أن $عل = عم$

❸ في الشكل المقابل :
س ص ل هـ مستطيل ، و ص ل مثلث متطابق الضلعين . وظف التطابق لإثبات أن :
و منتصف $\overline{سهـ}$.



المعطيات : س ص ل هـ مستطيل ، و ص ل مثلث متطابق الضلعين

المطلوب : و منتصف $\overline{سهـ}$ $سو = لهـ$

البرهان : س ص ل هـ مستطيل ∴ $ق(ص\hat{س}هـ) = ق(ص\hat{ل}هـ) = 90°$ (١)

$\triangle$ ص ول متطابق الضلعين ∴ $ص و = ول$ (٢)

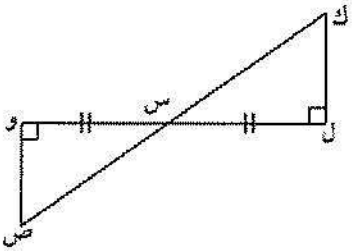
$\triangle$ س ص و ، $\triangle$ ول هـ المثلثان الزاويتان فيهما :

(١) $ص و = ول$ (برهان ٢)

(٢) $س ص = هـ ل$ (برهان ١)

∴ $\triangle س ص و \equiv \triangle ول هـ$ (ض ، ز ، ض)

وينتج أن $سو = وهـ$ أي أن و منتصف $\overline{سهـ}$



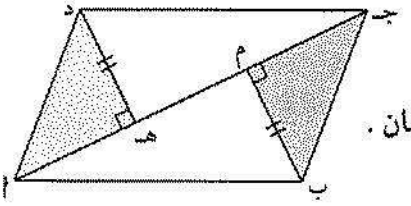
④ في الشكل المقابل :
برهن أنّ Δ ك ل س ≅ Δ ص و س .

Δ ك ل س ، Δ ص و س فيهما :

(١) ل س = س و (معطى)

(٢) ق(∠ل) = ق(∠و) (معطى) ∴ Δ ك ل س ≅ Δ ص و س

(٣) ق(∠ك س ل) = ق(∠ص س و) (بالتقابل بالرأس) (ز ، ض ، ز)



⑤ صمم عبد الكريم لوحة من الفسيفساء كما في الشكل المقابل ،
وأراد إثبات أن : Δ جـ م ب ، Δ ا هـ د متطابقان .
ساعده في إثبات ذلك.
(علمًا بأن الشكل جـ ب ا د متوازي أضلاع)

المعطيات : جـ ب ا د متوازي أضلاع ، ق(∠جـ م ب) = ق(∠د هـ ا) = ٩٠°

ب م = د هـ

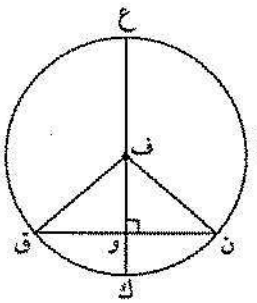
المطلوب : Δ جـ م ب ≅ Δ ا هـ د

البرهان : Δ جـ م ب ، Δ ا هـ د القائما الزاوية فيهما

(١) ب م = د هـ (٢) جـ ب = د ا خواص متوازي الأضلاع

∴ Δ جـ م ب ≅ Δ ا هـ د (Δ ، و ، ض)

⑥ دائرة مركزها ف ، ع ك ⊥ ن ق ،
وظف التطابق لاثبات أنّ :
و منتصف ن ق .



Δ ن ف و ، Δ ق ف و فيهما القائما الزاوية

(١) ن ف = ف و (نصف قطر)

(٢) ف و ضلع مشترك

∴ Δ ن ف و ≅ Δ ق ف و (Δ ، و ، ض)

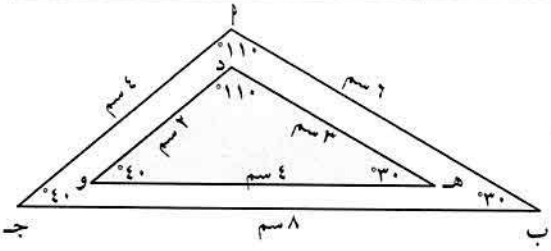
ينتج أن ن و = و ق أي أن و منتصف ن ق

٤-٧ تشابه المثلّثات
Similarity of Triangles

سوف تتعلّم: تشابه المثلّثات .

العبارات والمفردات :
التشابه
Similarity
رمز التشابه ~
Symbol of Similarity ~

نشاط :



في الشكل المقابل المثلّثان أ ب جـ ، د هـ و لهما الشكل نفسه ولكن ليس بالضرورة القياسات نفسها.

معلومات مفيدة :
للتشابه أهمّية كبيرة في كثير من تصاميم المباني والأجهزة والاستحقاقات الحياتية المتنوّعة .

من المعلومات على الرسم أكمل ما يلي :

١ ق(أ̂) = ق(د̂) ، ق(ب̂) = ق(هـ̂) ، ق(جـ̂) = ق(و̂)

∴ الزوايا المتناظرة متطابقة

٢ $\frac{أب}{دهـ} = \frac{٦}{٣} = \frac{٢}{١}$ ، $\frac{ب جـ}{هـ و} = \frac{٨}{٤} = \frac{٢}{١}$ ، $\frac{أجـ}{د و} = \frac{٤}{٢} = \frac{٢}{١}$

∴ الأضلاع المتناظرة متناسبة

تذكر أنّ :
يتشابه المضلعان إذا وفقط إذا كانت :
- زواياهما المتناظرة متطابقة .
- أطوال أضلاعها المتناظرة متناسبة .

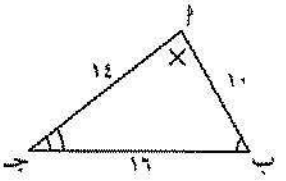
∴ Δ أ ب جـ يشابه Δ د هـ و وترمز لذلك Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و

Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و ⟺

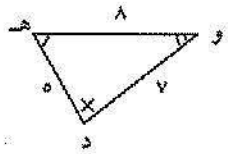
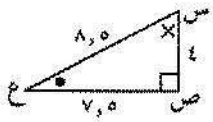
الزوايا المتناظرة المتطابقة	الأضلاع المتناظرة متناسبة
ق(أ̂) = ق(د̂) ق(ب̂) = ق(هـ̂) ق(جـ̂) = ق(و̂)	$\frac{أب}{دهـ} = \frac{ب جـ}{هـ و} = \frac{أجـ}{د و}$ (نسبة التشابه)

ملاحظة : **نراعي ترتيب رؤوس المثلثين عند كتابة عبارة التشابه .**

تدرّب (١) :

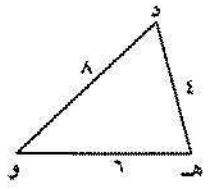


في الجدول التالي حدّد أيًا من المثلّثات يشابه Δ أ ب جـ مع ذكر السبب .

م	المثلّث	يشابه أو لا يشابه	السبب
١		يشابه	الزوايا المتناظرة متطابقة و أطوال الأضلاع المتناظرة
ب		لا يشابه	الزوايا المتناظرة غير متطابقة و أطوال الأضلاع غير متناظرة

مثال :

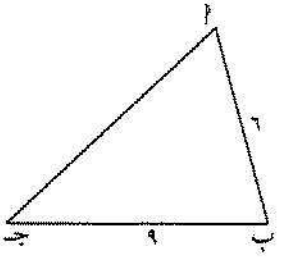
في الشكل المقابل : Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و :



١ اذكر الزوايا المتناظرة المتطابقة .

ب أكتب نسبة التشابه .

جـ أوجد طول أجـ ؟



الحلّ :

∵ Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و :

١ ∴ الزوايا المتناظرة والمتطابقة هي :

$\hat{أ} \cong \hat{د}$ ، $\hat{ب} \cong \hat{هـ}$ ، $\hat{جـ} \cong \hat{و}$

ب أطوال الأضلاع المتناظرة المتناسبة هي :

$\frac{أب}{دهـ} = \frac{ب جـ}{هـ و} = \frac{أجـ}{د و}$ ⟸ نسبة التشابه $= \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

جـ $\frac{٦}{٤} = \frac{٩}{٦} = \frac{أجـ}{٨}$

$\frac{٦}{٤} = \frac{أجـ}{٨}$

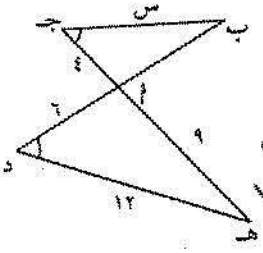
$أجـ = \frac{٦ \times ٨}{٤}$

$أجـ = ١٢$

تذكّر أنّ :
مجموع قياسات زوايا المثلّث يساوي ١٨٠°

ملاحظة :
لتحديد الأضلاع المتناظرة ، يمكن ترتيب أطوال الأضلاع تصاعديًا أو تنازليًا في كلّ من المثلّثين .

تدرّب (٢) :



في الشكل المقابل : Δ ا ب جـ ~ Δ ا هـ د . أوجد قيمة س ؟

المعطيات : م(∠ب) = م(∠د) ، ا جـ = ٤ ، ا ب = ٩ ، ا د = ٦ ، ا هـ = ١٢

المطلوب : قيمة س

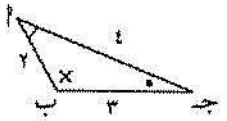
البرهان : ∵ Δ ا ب جـ ~ Δ ا هـ د

∴ ا ب / ا هـ = ا جـ / ا د = ب جـ / هـ د

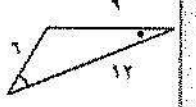
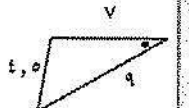
∴ س / ١٢ = ٤ / ٦ ∴ س = (٤ × ١٢) / ٦ = ٨

تذكر أنّ :
إذا تطابقت زاويتان في مثلث مع نظائرهما في المثلث الآخر ، فإن الزاوية الثالثة فيهما تكون متطابقة. (لأن مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي ١٨٠°)

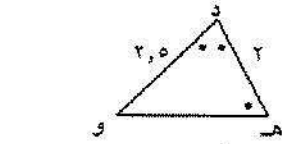
تمـــرّن :

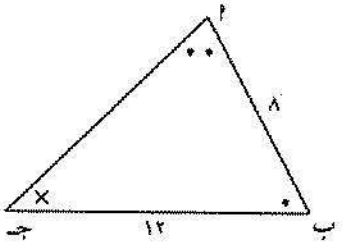


❶ في الجدول التالي حدِّد أيًّا من المثلّثات يشابه Δ ا ب جـ مع ذكر السبب .

م	المثلّث	يشابه أو لا يشابه	السبب
❶		يشابه	لأن الزوايا المتناظرة متطابقة وأطوال الأضلاع متناظرة
❷		لا يشابه	لأن الزوايا المتناظرة غير متطابقة وأطوال الأضلاع غير متناظرة

٢ في الشكل المقابل : Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و .
أُحسب طول كلّ من $\overline{أجـ}$ ، $\overline{هـو}$.





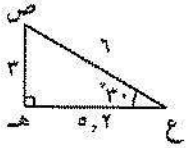
البرهان : ∵ Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و

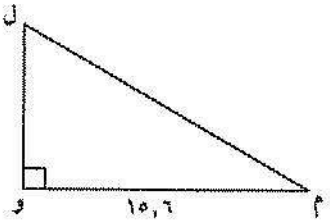
∴ $\frac{د هـ}{أ ب} = \frac{د و}{ب جـ} = \frac{هـ و}{جـ أ}$

$\frac{٢}{٨} = \frac{٢,٥}{ب جـ} = \frac{هـ و}{١٢}$

أ جـ = ١٠ ، هـ و = ٣

٣ في الشكل أدناه :





Δ ل م و ~ Δ ص ع هـ . أُحسب طول كلٍّ من $\overline{ل م}$ ، $\overline{ل و}$ ، ق(∠ل) .

البرهان : ∵ مجموع زوايا المثلث الداخلية = ١٨٠° ∴ ق(∠هـ) = ٦٠°

∵ Δ ل م و ~ Δ ص ع هـ ∴ ق(∠ل) = ٦٠°

$\frac{ع هـ}{م و} = \frac{ص هـ}{و ل} = \frac{ع ص}{م ل}$

$\frac{٥,٢}{١٥,٦} = \frac{٣}{و ل} = \frac{٦}{ل م}$

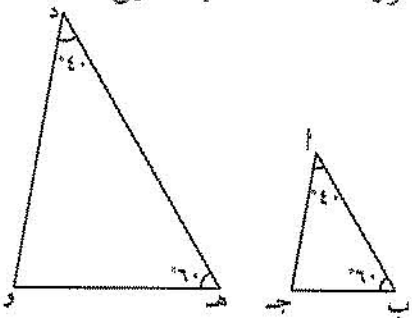
ل و = ٩ ، ل م = ١٨

٨-٤ تشابه مثلّثين بتطابق زاويتين
Similarity of 2 Triangles with 2 Congruent angles

سوف تتعلّم: تشابه مثلّثين بتطابق زاويتين فقط .

في دراستنا لتشابه المثلثات استخدمنا العلاقة بين ٣ زوايا و ٣ أضلاع . نبحث الآن عن عدد أقلّ من الشروط لتشابه مثلّثين ، تُسمّى هذه الشروط حالات تشابه مثلّثين .

نشاط :



في الشكل المقابل :

Δ أ ب جـ فيه ق (أ) = ٤٠° ، ق (ب) = ٦٠° ،

Δ د هـ و فيه ق (د) = ٤٠° ، ق (هـ) = ٦٠°

لمعرفة أطوال أضلاع المثلّثين نستخدم المسطرة وفرجار القياس

لإكمال الجدول التالي :

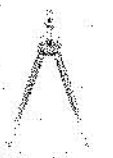
المثلّث	قياسات الزوايا	أطوال الأضلاع
Δ أ ب جـ	ق (أ) = ٤٠° ، ق (ب) = ٦٠° ، ق (جـ) = ٨٠°	أ ب = ٤ ، ب جـ = ١,٥ ، أ جـ = ٢,٨
Δ د هـ و	ق (د) = ٤٠° ، ق (هـ) = ٦٠° ، ق (و) = ٨٠°	د هـ = ٤ ، هـ و = ٣ ، د و = ٣,٦
النتائج	ق (أ) = ق (د) ، ق (ب) = ق (هـ) ، ق (جـ) = ق (و)	$\frac{أ ب}{د هـ} = \frac{٤}{٤}$ ، $\frac{ب جـ}{هـ و} = \frac{١,٥}{٣}$ ، $\frac{أ جـ}{د و} = \frac{٢,٨}{٣,٦}$

ما العلاقة بين الزوايا المتناظرة ؟ متطابقة ، الأضلاع المتناظرة ؟ متشابهة

هل المثلّثان متشابهان ؟ نعم

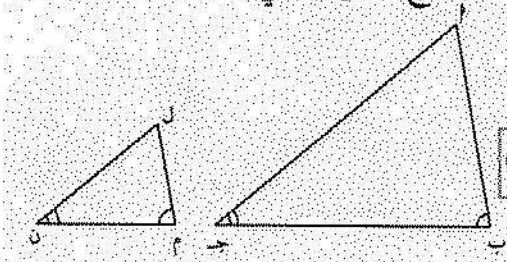
معلومات مفيدة :
يستخدم المهندسون حالات تشابه المثلثات للمساعدة في إيجاد ارتفاع مبنى وكذلك معرفة عمق المياه عند نقطة محددة .

اللوازم :
- مسطرة
- فرجار قياس .



نظرية (١) :

يتشابه المثلّثان إذا تطابقت زاويتان في أحدهما مع نظائرهما في المثلّث الآخر .



ا ب جـ ، ل م ن مثلّثان فيهما :

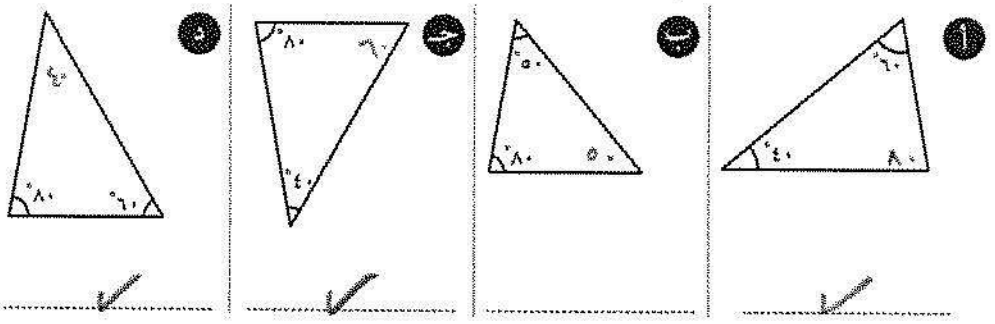
ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{م}$) ، ق ($\hat{جـ}$) = ق ($\hat{ن}$)

∴ Δ ا ب جـ ~ Δ ل م ن

ومنها نستنتج أن $\frac{ا ب}{ل م} = \frac{ب جـ}{م ن} = \frac{ا جـ}{ل ن}$

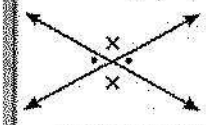
تدرّب (١) :

حدِّد المثلّثات المتشابهة في ما يلي حسب الشروط المعطاة .



أ ✓ ب ..... جـ ✓ د ✓

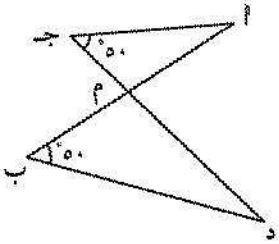
تذكّر أنّ :



الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان .

تدرّب (٢) :

في الشكل : ق ($\hat{جـ}$) = ق ($\hat{ب}$) = ٥٠°



أثبت أنّ : Δ ا م جـ ~ Δ د م ب .

المعطيات : ق ($\hat{جـ}$) = ٥٠° ، ق ($\hat{ب}$) = ٥٠°

المطلوب : إثبات أنّ Δ ا م جـ ~ Δ د م ب

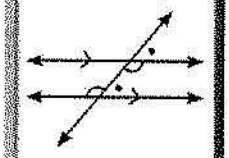
البرهان : Δ ا م جـ ، Δ د م ب فيهما :

(١) ق ($\hat{جـ}$) = ق ($\hat{ب}$) = ٥٠° (معطى)

(٢) ق ($\hat{ا م جـ}$) = ق ($\hat{ب م د}$) (المتقابل بالرأس)

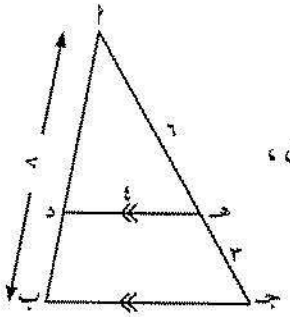
∴ Δ ا م جـ ~ Δ د م ب

تذكَّرْ أنّ :



إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإنّ الزوايا:
(١) المتناظرة متطابقة
(٢) المتبادلة متطابقة
(٣) المتحالفة متكاملة

مثال :



في الشكل المقابل :

$\overline{دهـ}$ // $\overline{ب جـ}$ ، أهـ = ٦ وحدة طول ، هـ جـ = ٣ وحدة طول ،

أ ب = ٨ وحدة طول ، هـ د = ٤ وحدة طول

أوجد طول كلّ من : $\overline{أد}$ ، $\overline{دب}$

الحلّ :

المعطيات : $\overline{دهـ}$ // $\overline{ب جـ}$ ، أهـ = ٦ ، هـ جـ = ٣ ، أ ب = ٨ ، هـ د = ٤

المطلوب : إيجاد طول $\overline{أد}$ ، $\overline{دب}$

البرهان : Δ أهـ د ، Δ أجـ ب فيهما :

(١) ق(أ) (أ) (زاوية مشتركة)

(٢) ق(أهـ د) = ق(أجـ ب) (بالتناظر والتوازي)

من (١) و (٢) ينتج أنّ Δ أهـ د ~ Δ أجـ ب

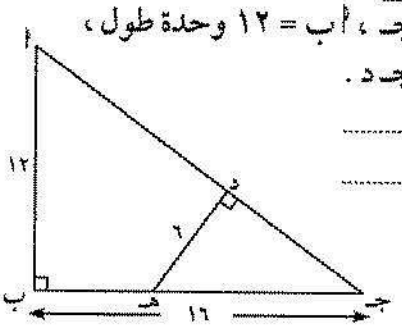
$\therefore \frac{أهـ}{أجـ} = \frac{هـ د}{جـ ب} = \frac{أد}{أ ب}$ ، $\frac{٦}{٩} = \frac{٤}{جـ ب} = \frac{أد}{٨}$

$\therefore أد = \frac{٨ \times ٦}{٣ \times ٣} = \frac{١٦}{٣} = ٥\frac{١}{٣}$ ، $\therefore دب = ٨ - ٥\frac{١}{٣} = ٢\frac{٢}{٣}$

تدرّب (٤) :

في الشكل المقابل : Δ أ ب جـ قائم في ب ، $\overline{هـ د} \perp \overline{أجـ}$ ، أ ب = ١٢ وحدة طول ،

ب جـ = ١٦ وحدة طول ، هـ د = ٦ وحدة طول ، أوجد جـ د .



المعطيات : ق(ب) = ٩٠° ، ق(هـ د جـ) = ٩٠°

أ ب = ١٢ ، ب هـ = ١٦ ، هـ د = ٦

المطلوب : طول جـ د

البرهان : Δ أجـ ب ، Δ هـ جـ د فيهما :

(١) ق(جـ) زاوية مشتركة (معطى)

(٢) ق(هـ د جـ) = ق(أ ب جـ) (معطى)

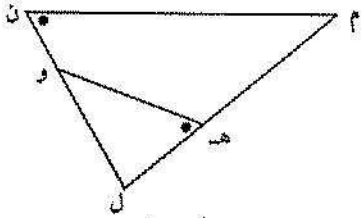
$\therefore$ Δ أجـ ب ~ Δ هـ جـ د ← وينتج بسبب التشابه أطوال الأضلاع المتناظرة .

$\therefore \frac{أجـ}{هـ جـ} = \frac{جـ ب}{جـ د} = \frac{أ ب}{هـ د}$

$\frac{أجـ}{هـ جـ} = \frac{١٦}{جـ د} = \frac{١٢}{٦}$

١٢ جـ د = ٦ × ١٦ ، $\therefore$ جـ د = ٨ وحدة طول

تمـــرّنْ :



١ في الشكل المقابل : أثبت أنّ المثلّثين
ل هـ و ، ل ن م متشابهان .

المعطيات :- م(ل هـ و) = م(أ ن ل)

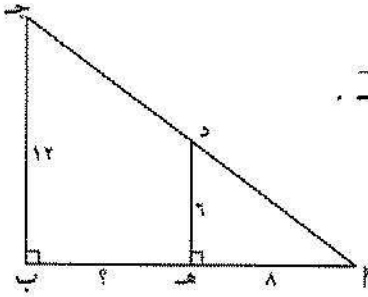
المطلوب :- Δ ل هـ و ~ Δ ل ن م

البرهان :- Δ ل هـ و ، Δ ل ن م فيهما :

(١) ل(ل) مشتركة (معطى)

(٢) م(ل هـ و) = م(أ ن ل) (معطى)

∴ Δ ل هـ و ~ Δ ل ن م



٢ في الشكل المقابل : أثبت أنّ المثلّثين
أ ب جـ ، أ هـ د متشابهان . ثمّ أوجد طول ب هـ .

البرهان :- Δ أ ب جـ ، Δ أ هـ د فيهما :

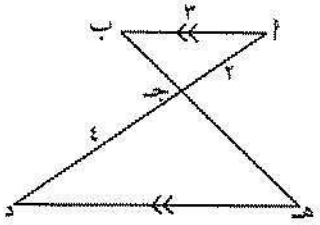
(١) (أ) مشتركة (معطى)

(٢) م(∠ أ ب جـ) = م(∠ أ هـ د) (معطى)

∴ Δ أ ب جـ ~ Δ أ هـ د وينتج أن $\frac{أ هـ}{أ ب} = \frac{هـ د}{ب جـ} = \frac{أ د}{أ جـ}$ $\frac{٦}{١٢} = \frac{٨}{أ ب}$ أ ب = ١٦

∴ ب هـ = ٨

٣ في الشكل :



أ ب // هـ د ، أ جـ = ٢ وحدة طول ،
أ ب = ٣ وحدة طول ، جـ د = ٤ وحدة طول
أثبت أنّ : Δ أ جـ ب ~ Δ د جـ هـ
ثمّ أوجد هـ د .

المعطيات :- أ ب // هـ د ، أ جـ = ٢ ، أ ب = ٣ ، جـ د = ٤

المطلوب :- Δ أ جـ ب ~ Δ د جـ هـ ، أوجد هـ د

البرهان :- Δ أ جـ ب ، Δ د جـ هـ فيهما :

(١) م(∠ جـ أ ب) = م(∠ جـ د هـ) بالتبادل

(٢) م(∠ جـ ب أ) = م(∠ جـ هـ د) بالتبادل

∴ Δ أ جـ ب ~ Δ د جـ هـ وينتج أن

$\frac{أ ب}{هـ د} = \frac{أ جـ}{جـ د}$ $\frac{٣}{هـ د} = \frac{٢}{٤}$ هـ د = ٦

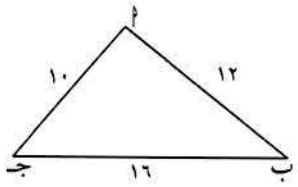
٤-٩ تشابه مثلّثين بتناسب أطوال الأضلاع المتناظرة
Similarity of 2 Triangles with Proportional Sides

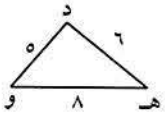
سوف تتعلّم: تشابه مثلّثين بتناسب أطوال أضلاعهما المتناظرة .

معلومات مفيدة :
يستخدم صانعوا المراكب الشراعية تشابه المثلثات في صناعة الأشرعة ، لأهميتها في عملية الإبحار وقدرتها على زيادة سرعة القارب .

اللوازم :
- منقلة

نشاط :





في الشكل المقابِل :

Δ أ ب جـ فيه :

أ ب = ١٢ ، ب جـ = ١٦ ، أ جـ = ١٠

Δ د هـ و فيه :

د هـ = ٦ ، هـ و = ٨ ، د و = ٥

من الرسم المقابل أكمل الجدول التالي :

المثلّث	أطوال الأضلاع	النتائج
Δ أ ب جـ	أ ب = ١٢ ، ب جـ = ١٦ ، أ جـ = ١٠	$\frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}} = \frac{١٢}{٦} = \frac{٢}{١}$ ، $\frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ د}} = \frac{١٦}{٨} = \frac{٢}{١}$ ، $\frac{\text{أ جـ}}{\text{د و}} = \frac{١٠}{٥} = \frac{٢}{١}$
Δ د هـ و	د هـ = ٦ ، هـ و = ٨ ، د و = ٥	

(١) ∴ الأضلاع المتناظرة متناسبة

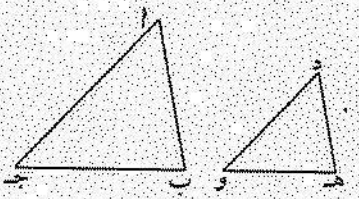
أكمل الجدول التالي باستخدام المنقلة :

المثلّث	أطوال الأضلاع	النتائج
Δ أ ب جـ	ق(أ) = ٩٠° ، ق(ب) = ٤٠° ، ق(جـ) = ٥٠°	ق(أ) = ق(د) ، ق(ب) = ق(هـ) ، ق(جـ) = ق(و)
Δ د هـ و	ق(د) = ٩٠° ، ق(هـ) = ٤٠° ، ق(و) = ٥٠°	

(٢) ∴ الزوايا المتناظرة متطابقة

هل Δ أ ب جـ ، Δ د هـ و متشابهان ؟ فسر ذلك .

نظرية (٢) :



يتشابه مثلّثان إذا تناسبت أطوال أضلاعهما المتناظرة .

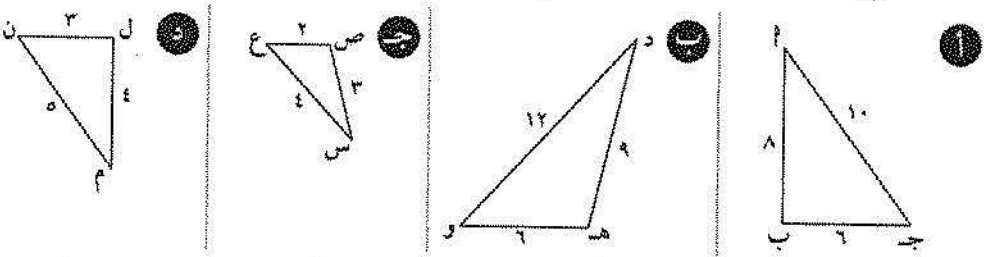
Δ د هـ و ، Δ أ ب جـ فيهما :

$$\frac{\text{د هـ}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{هـ و}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{د و}}{\text{أ جـ}} \iff \Delta \text{ د هـ و} \sim \Delta \text{ أ ب جـ}$$

و منها نستنتج أن الزوايا المتناظرة متطابقة .

تدرّب (١) :

حدِّد أزواج المثلّثات المتشابهة فيما يلي :



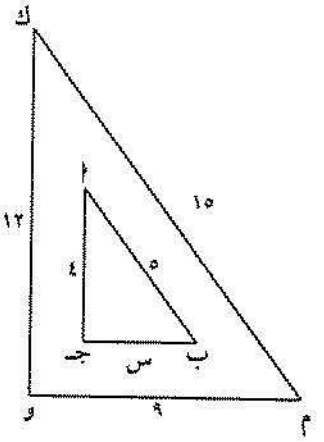
Δ أ ب جـ ≅ Δ د ن ل ، Δ د هـ و ~ Δ ص س ع

تدرّب (٢) :

في الشكل المقابل وبحسب المعطيات ، أوجِد قيمة س التي تجعل المثلثان متشابهان .

قيمة س التي تجعل المثلثان أ ب جـ ، ك م و متشابهان .

تحقق شرط تناسب الأضلاع المتناظرة .



$$\therefore \frac{\text{أ ب}}{\text{ك م}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{م و}} = \frac{\text{أ}}{\text{ك و}}$$

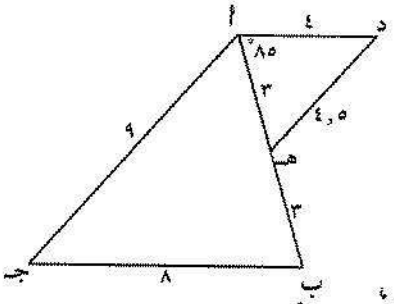
$$\frac{٤}{١٢} = \boxed{\frac{\text{س}}{٩} = \frac{٥}{١٥}}$$

$$\text{س} = \frac{٥ \times ٩}{١٥}$$

$$\therefore \text{س} = ٣$$

تدرّب (٣) :

في الشكل المقابل وحسب المعطيات المدونة عليه :



أ أثبت أنّ : Δ ا د هـ ~ Δ ب جـ ا

ب أوجد قياس (ا$\hat{ب}$ جـ)

XX

المعطيات : هـ د = ٤,٥ ، د ا = ٤ ، هـ ا = ٣ ،

ا جـ = ٩ ، جـ ب = ٨ ، ا ب = ٦ ، ق ($\hat{ا}$) = ٨٥°

المطلوب : إثبات أنّ Δ ا د هـ ~ Δ ا ب جـ ، ق (د $\hat{ا}$ هـ) = ٨٥°

البرهان : Δ ا د هـ ، Δ ا ب جـ فيهما :

(١) $\frac{ا د}{ب جـ} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

(٢) $\frac{د هـ}{ب ا} = \frac{٤,٥}{٩} = \frac{١}{٢}$

(٣) $\frac{ا هـ}{ا جـ} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

الأضلاع المتناظرة متناسبة

∴ Δ ا د هـ ~ Δ ا ب جـ

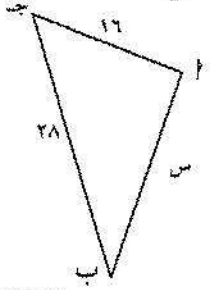
ق (ا$\hat{ب}$ جـ) = ق (د $\hat{ا}$ هـ) = ٨٥°

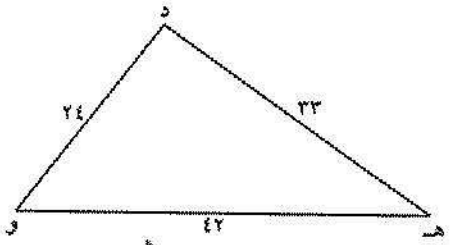
فكر وناقش

هل كل المثلثات المتطابقة متشابهة؟ وهل العكس صحيح؟

تمـــرّنْ :

أ إذا علمت أنّ Δ ا ب جـ ~ Δ د هـ و ، فأوجد قيمة س .



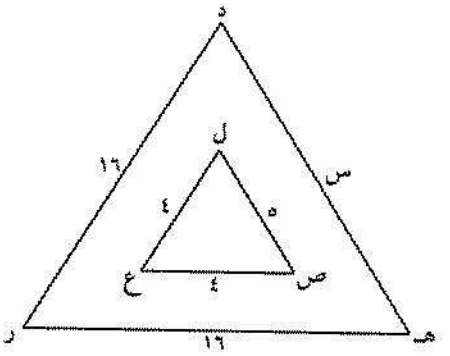


Δ ا ب جـ ~ Δ د هـ و

$\frac{ب جـ}{هـ و} = \frac{ا ب}{د و} = \frac{س}{٣٣}$ ، $\frac{٢٨}{٤٢}$

س = ٢٢

٢ في الشكل المقابل وبحسب المعطيات ، أوجِد قيمة س التي تجعل المثلثان متشابهان .



البرهان : لكي يتشابه المثلثان لابد أن

$\frac{\text{هـ ع}}{\text{ر د}} = \frac{\text{ل ع}}{\text{د ر}} = \frac{\text{هـ ل}}{\text{هـ د}}$

$\frac{٤}{١٦} = \frac{٤}{١٦} = \frac{٥}{\text{س}}$

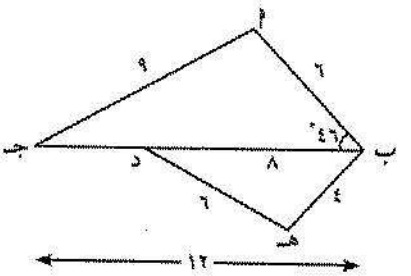
$\text{س} = \frac{١٦ \times ٥}{٤} = ٤٠$

٣ في الشكل المقابل :

إذا كان أ ب = ٦ ، ب جـ = ١٢ ،

أ جـ = ٩ ، ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ٤٦°

هـ ب = ٤ ، ب د = ٨ ، هـ د = ٦



١ أثبت أنّ Δ أ ب جـ ~ Δ هـ ب د .

$\frac{\text{ب هـ}}{\text{ب أ}} = \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$

$\frac{\text{هـ د}}{\text{أ جـ}} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$

$\frac{\text{ب د}}{\text{ب جـ}} = \frac{٨}{١٢} = \frac{٢}{٣}$

$\therefore \frac{\text{ب هـ}}{\text{ب أ}} = \frac{\text{هـ د}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{ب د}}{\text{ب جـ}}$

$\therefore$ Δ أ ب جـ ~ Δ هـ ب د

٥ أوجد ق (هـ $\hat{ب}$ د) .

$\because$ Δ أ ب جـ ~ Δ هـ ب د

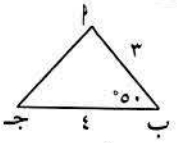
$\therefore$ ق (أ $\hat{ب}$ جـ) = ق (هـ $\hat{ب}$ د) = ٤٦°

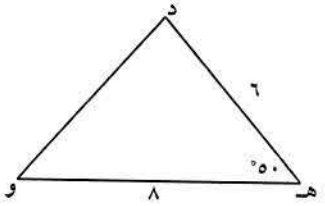
٤-١٠ تشابه مثلّثين بتطابق زاوية وتناسب طولي الضلعين المحددين لها

Similarity of 2 Triangles with a pair of Congruent angles and 2 pairs of Proportional Sides

سوف تتعلّم: تشابه مثلّثين بتطابق زاوية في كلٍّ منهما وتناسب طولي الضلعين المحددين لهما .

نشاط :





في الشكل المقابِل :

Δ أ ب جـ فيه : أ ب = ٣ ، ب جـ = ٤ ، ق ($\hat{ب}$) = ٥٠° ،

Δ د هـ و فيه : د هـ = ٦ ، هـ و = ٨ ، ق ($\hat{هـ}$) = ٥٠°

أكمِل الجدول التالي :

المثلّث	أطوال الأضلاع	تناسب الأضلاع
Δ أ ب جـ	أ ب = ٣ ، ب جـ = ٤	$\frac{أ ب}{د هـ} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$
Δ د هـ و	د هـ = ٦ ، هـ و = ٨	$\frac{ب جـ}{هـ و} = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

∵ ق ($\hat{ب}$) = ق ($\hat{هـ}$) = ٥٠°

اللوازم :
- منقلة

باستخدام الأدوات الهندسية (المنقلة) . أكمِل الجدول التالي :

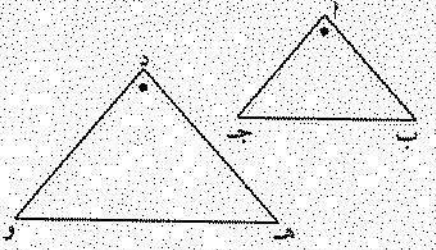
المثلّث	قياسات الزوايا	الزوايا المتناظرة
Δ أ ب جـ	ق ($\hat{أ}$) = ٨١°	ق ($\hat{أ}$) = ق ($\hat{د}$)
Δ د هـ و	ق ($\hat{د}$) = ٨١°	الزوايا المتناظرة متطابقة

من الحالة الأولى (تشابه مثلثين بتطابق زاويتين في كلّ منهما) .

ينتج أنّ : Δ أ ب جـ ~ Δ د هـ و

نظرية (٣) :

يتشابه المثلّثان إذا طابقت زاوية في أحدهما زاوية في المثلّث الآخر وتناسب طولا ضلعي هاتين الزاويتين .



اب جـ ، د هـ و مثلّثان فيهما :

$$ق(\hat{ا}) = ق(\hat{د})$$

$$\frac{اب}{د هـ} = \frac{اجـ}{د و}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\Delta\ اب جـ \sim \Delta\ د هـ و$$

وينتج أن : $ق(\hat{ب}) = ق(\hat{هـ})$ ،

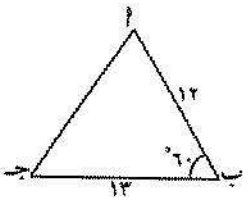
$ق(\hat{جـ}) = ق(\hat{و})$ ،

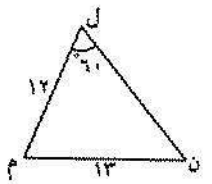
$\frac{ب جـ}{هـ و}$ يساوي نسبة التشابه .

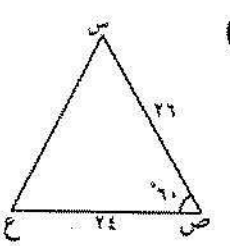
ملاحظة : نستطيع من النشاط السابق إثبات التشابه من تناسب أطوال الأضلاع .

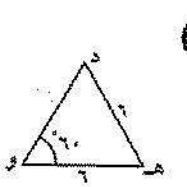
تدرّب (١) :

أيّ من المثلّثات أدناه متشابهة مع Δ اب جـ ؟





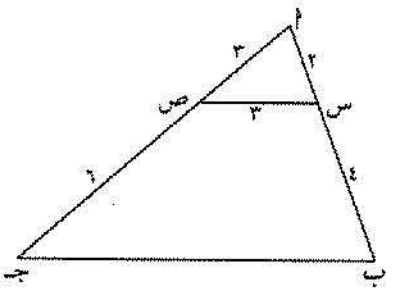




تدرّب (٢) :

في الشكل المقابل : ا س = ٢ ، س ب = ٤ ،

ا ص = ٣ ، ص جـ = ٦



❶ أثبت أنّ : Δ ا س ص يشابه Δ ا ب جـ

❷ أوجد طول $\overline{ب جـ}$.

المعطيات : ا س = ٢ ، س ب = ٤ ، ا ص = ٣ ، ص جـ = ٦

المطلوب : ❶ إثبات أنّ Δ ا س ص ~ Δ ا ب جـ ❷ طول ب جـ

البرهان : Δ ا س ص ، Δ ا ب جـ فيهما :

(١) ∠ ا مشتركة

(٢) $\frac{ا س}{ا ب} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

(٣) $\frac{ا ص}{ا جـ} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

⟸ الأضلاع المتناظرة متناسبة

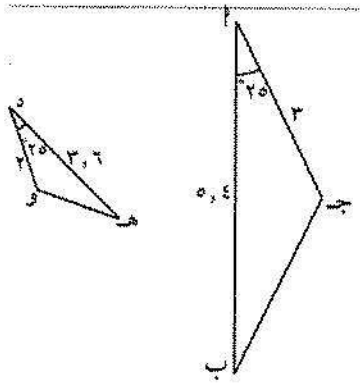
∴ Δ ا س ص ~ Δ ا ب جـ

ينتج أن:

$\frac{س ص}{ب جـ} = \frac{١}{٣}$ ، $\frac{٣}{ب جـ} = \frac{١}{٣}$ ، ب جـ = ٣ × ٣ = ٩

تدرّب (٣) :

هل المثلّثان في الشكل المقابل متشابهان ؟



المعطيات :

ق (∠ ا) = ٢٥° ، ا جـ = ٣ ، ا ب = ٥,٤

ق (∠ د) = ٢٥° ، د و = ٢ ، د هـ = ٣,٦

المطلوب :

أثبت أنّ المثلّثان متشابهان .

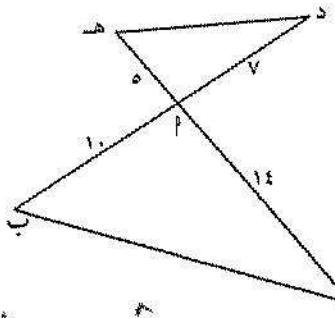
البرهان :

ق (∠ ا) = ق (∠ د) = ٢٥°

$\frac{ا ب}{د هـ} = \frac{٥,٤}{٣,٦} = \frac{٣}{٢}$ ، $\frac{ا جـ}{د و} = \frac{٣}{٢}$

∴ Δ ا ب جـ ~ Δ د هـ و

تمـــرّنْ :



(١) في الشكل المقابل وبحسب المعلومات المعطاة ،
أثبت أنّ : Δ أ د هـ يشابه Δ أ جـ ب

البرهان : Δ أ د هـ ، Δ أ جـ ب فيهما :

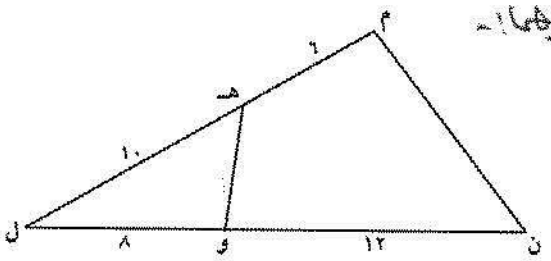
(١) $\frac{د أ}{ب أ} = \frac{٧}{١٤} = \frac{١}{٢}$

(٢) $\frac{هـ أ}{جـ أ} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$ (٣) ق(∠ د أ هـ) = ق(∠ جـ أ ب) بالتقابل بالرأس

∴ طولا ضلعين متناظرة متناسبة

∴ Δ أ د هـ ~ Δ أ جـ ب

(٢) في الشكل المقابل : أثبت أنّ : Δ ل هـ و ~ Δ ل ن م .



البرهان : Δ ل هـ و ، Δ ل ن م فيهما :

(١) (∠ ل) مشتركة

(٢) $\frac{ل هـ}{ل ن} = \frac{١٠}{٢٠} = \frac{١}{٢}$

(٣) $\frac{ل و}{ل م} = \frac{٨}{١٦} = \frac{١}{٢}$

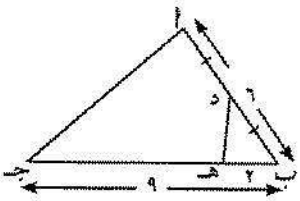
∴ طولا ضلعين متناظرة متناسبة

∴ Δ ل هـ و ~ Δ ل ن م

(٣) أ ب جـ مثلّث فيه أ ب = ٦ ، ب جـ = ٩

د منتصف $\overline{أ ب}$ ، هـ ∈ $\overline{ب جـ}$ بحيث ب هـ = ٢

أثبت أنّ Δ د ب هـ ~ Δ جـ ب أ .



البرهان : Δ د ب هـ ، Δ أ ب جـ فيهما :

(١) (∠ ب) مشتركة

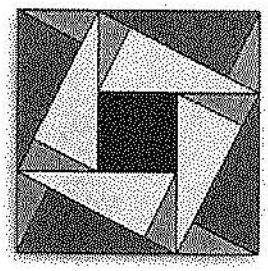
(٢) $\frac{ب هـ}{ب أ} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

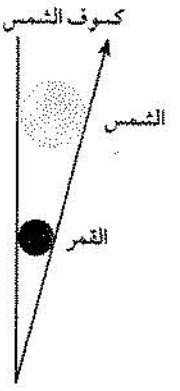
(٣) $\frac{ب د}{ب جـ} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

∴ طولا ضلعين متناظرة متناسبة

∴ Δ د ب هـ ~ Δ جـ ب أ

٤-١١ تطبيقات على تشابه المثلّثات
Applications on the Similarity of Triangles



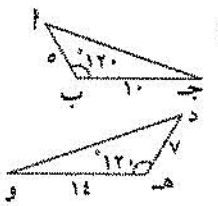


- في بعض الحالات يصعب قياس مسافة أو ارتفاع معيَّن مباشرة . في هذه الحالة يمكن استخدام تشابه المثلّثات لإيجاد هذا القياس بطريقة غير مباشرة .
- وأيضًا من تصاميم المباني أو إيجاد بعد فلكي عن مركز الأرض عند مراقبة كسوف الشمس .

تدرّب (١) :

حدِّد ما إذا كانت أزواج المثلّثات التالية متشابهة وفقًا للمعطيات الموضحة في كل شكل ، ثم اكتب عبارة التشابه والنظرية المستخدمة .

أ



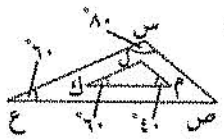
∵ م(∠ب) = م(∠هـ)

$\frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ د}} = \frac{٥}{٧}$

$\frac{\text{ب أ}}{\text{هـ و}} = \frac{١٠}{١٤} = \frac{٥}{٧}$

نظرية (٣)

ب



في Δ ك س م ، Δ ع ص م

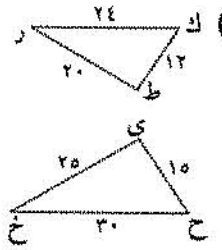
∵ م(∠س) = م(∠ص)

م(∠ك) = م(∠ع)

∴ المثلثان متشابهان

نظرية (١)

جـ



$\frac{\text{ك ط}}{\text{ي ح}} = \frac{١٤}{١٥} = \frac{٤}{٥}$

$\frac{\text{ط ر}}{\text{ح خ}} = \frac{٢٠}{٢٥} = \frac{٤}{٥}$

$\frac{\text{ر ك}}{\text{خ ي}} = \frac{٢٤}{٣٠} = \frac{٤}{٥}$

∴ المثلثان متشابهان

نظرية (٢)

معلومات مفيدة :

يُقال إنّ الفيلسوف الإغريقي أرسطو هو أوّل من قاس ارتفاع الأهرامات في مصر باستعمال خصائص الشكل .

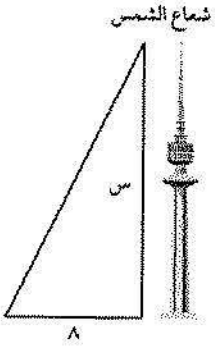
يبيّن النسبة الثابتة بين ارتفاعي جسمين وطولي ظليهما في الوقت نفسه .

تذكَّر أنّ :

البعد بين المستقيمات المتوازية ثابت ، فهما لا يتقاطعان مهما امتدّا .

تدرّب (٢) :

قاس وليد طول ظلّ بناية فوجده ٨ وحدة طول ، وفي الوقت نفسه قاس طول ظلّ عمود إنارة قريب من البناية فوجده ٢ وحدة طول ، إذا كان إرتفاع عمود الإنارة ٦ وحدة طول ، فما ارتفاع البناية ؟



بما أنّ عمود الإنارة والبناية يشكلان مع الأرض زاوية قائمة ، وأشعة الشمس متوازية لذا فهي تشكل زوايا متطابقة مع الأرض ، إذًا يكون المثلثان في الرسم متشابهين .

$$\frac{\text{طول ظل البناية}}{\text{طول ظل العمود}} = \frac{\text{ارتفاع البناية}}{\text{ارتفاع عمود الإنارة}}$$

اكتب تناسبًا

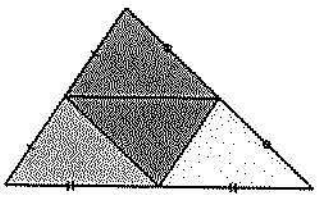
عوّض

$$\frac{٨}{٢} = \frac{س}{٦}$$

$$س = \frac{٨ \times ٦}{٢} = ٢٤$$

ارتفاع البناية = ٢٤ وحدة طول

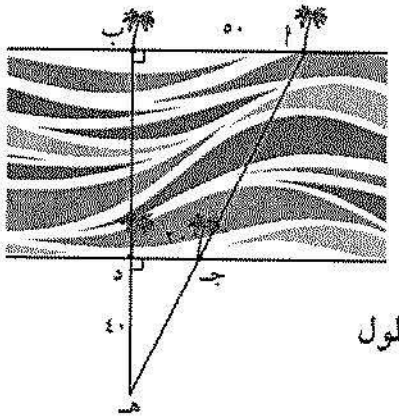
فكر وناقش



١ في الشكل المقابل :
تمّ تقسيم المثلّث الكبير إلى مثلّثات صغيرة .
كيف يمكن إثبات أنّ المثلّثات الصغيرة متشابهة مع المثلّث الكبير .

٢ هل كلّ المثلّثات المتطابقة الضلعين تكون متشابهة .

تمـــرّنْ :



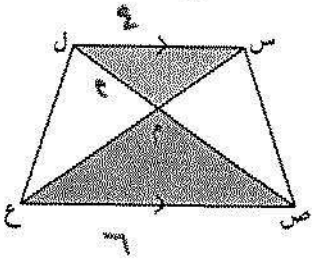
(١) أ ، ب شجرتان على شاطئ قناة ، البعد بينهما ٥٠ وحدة طول .
جـ ، د شجرتان على الشاطئ الآخر المقابل والموازي للشاطئ الأوّل والبعد بينهما ٢٠ وحدة طول . كما في الشكل المقابِل
بحيث كان هـ د ⊥ جـ د ، هـ د = ٤٠ وحدة طول
استخدم التشابه لإيجاد عرض القناة د ب .

البرهان : ∵ Δ هـ د جـ ~ Δ هـ ب أ

∴ هـ د / هـ ب = د جـ / ب أ = ٤٠ / ٥٠ = ٤ / ٥ ⟸ هـ ب = ١٠٠

∴ عرض القناة = ١٠٠ − ٤٠ = ٦٠ وحدة طول

(٢) في الشكل المقابِل : س ص ع ل شبه منحرف فيه س ل // ص ع
إذا كان س ل = ٤ ، ص ع = ٦ ،
ل م = ٢ فأثبِت أنّ : Δ س ل م ~ Δ ع ص م ،
ثمّ أوجِد طول ص ل .



البرهان : Δ س ل م ~ Δ ع ص م فيهما :

(١) ق(∠ س م ل) = ق(∠ ع م ص) بالتبادل

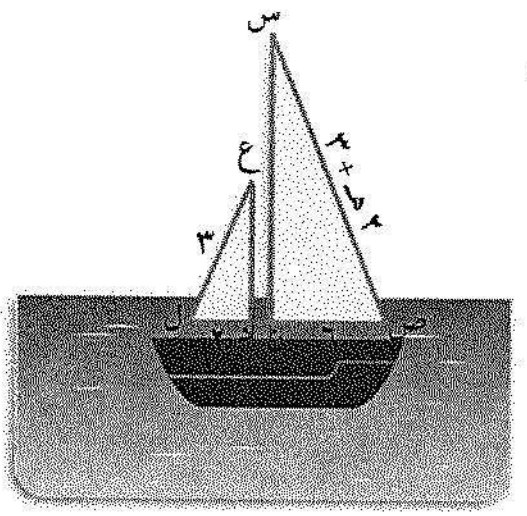
(٢) ق(∠ م ع ص) = ق(∠ م س ل) بالتبادل

∴ Δ س ل م ~ Δ ع ص م نظرية (١)

ونتج أنّه س ل / ص ع = ل م / ص م ⟸ ٤ / ٦ = ٢ / ص م ⟸ ص م = ٣

∴ ص ل = ٢ + ٣ = ٥

٣ في الشكل المقابل شراعي المركب س ص ن ، ع ل د مثلثين متشابهين.
أوجد قيمة هـ ، ثم أوجد طول س ص .



البرهان: ∵ Δ س ص ن ~ ع ل د متشابهين

∴ $\frac{د ل}{ص ن} = \frac{ع ل}{ص س}$

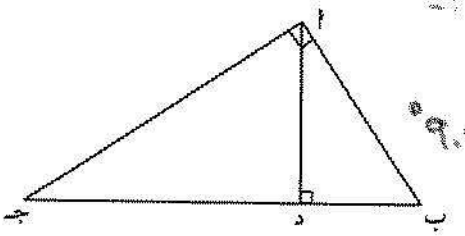
$\frac{٣}{٣+٥هـ} = \frac{٤}{٦}$ ← ٩ = ٣ + ٥هـ

٥هـ = ٣

∴ ص س = ٩

٤ في الشكل المقابل: أثبت أنّ Δ ا ب جـ ~ Δ د ب ا .

البرهان: Δ ا ب جـ ، Δ د ب ا فيهما :



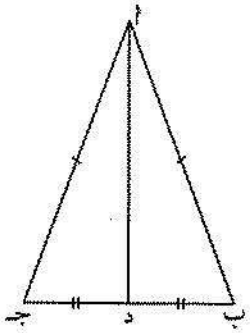
(١) (ق) مشتركة

(٢) ق(∠ ب ا د) = ق(∠ ب ا جـ) = ٩٠°

∴ Δ ا ب جـ ~ Δ د ب ا

بتطابق (١)

١ أكمِل كلًّا ممّا يلي :



لإثبات تطابق Δ أ ب د ، Δ أ جـ د بثلاثة أضلاع فإنّ :

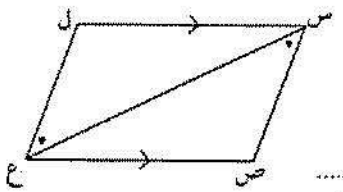
أ $\overline{أب} \cong \overline{أجـ}$

ب $\overline{أد} \cong \overline{أد}$ (ضلع مشترك) ٢٢

جـ $\overline{بد} \cong \overline{جـد}$

---

٢ في الشكل المقابِل أثبِت أنّ :



أ Δ س ص ع ≅ Δ ع ل س ، ب ق(∠ص) = ق(∠ل)

أ ق(∠ص س ع) = ق(∠س ع ل) (معطى)

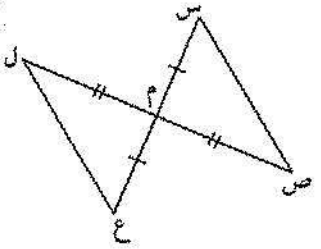
ق(∠ص ع س) = ق(∠ع س ل) (تبادل وتوازي)

$\overline{س ع}$ ضلع مشترك (ز.ض.ز)

ب ينتج مما سبق ق(∠ص) = ق(∠ل)

---

٣ في الشكل المقابِل: أثبِت أنّ Δ س م ص ≅ Δ ع م ل



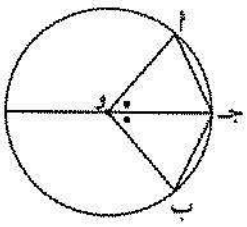
∠س م ص ≅ ∠ل م ع ، $\overline{س م} \cong \overline{ع م}$

ق(∠م س ص) = ق(∠م ع ل) بالتقابل بالرأس

Δ س م ص ≅ Δ ع م ل (ض.ز.ض)

---

٤ في الشكل المقابِل : دائرة مركزها و ، أثبِت أنّ أجـ = ب جـ .



Δ أ و جـ ، Δ ب جـ و فيهما :

(١) $\overline{أو} \cong \overline{بو}$ (نصف قطر)

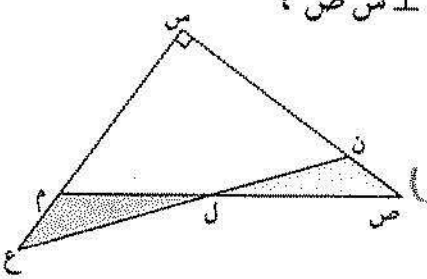
(٢) $\overline{جـو}$ (ضلع مشترك)

(٣) ق(∠أ و جـ) = ق(∠ب جـ و) (معطى)

∴ Δ أ و جـ ≅ Δ ب جـ و ، وينتج أن $\overline{أجـ} \cong \overline{ب جـ}$

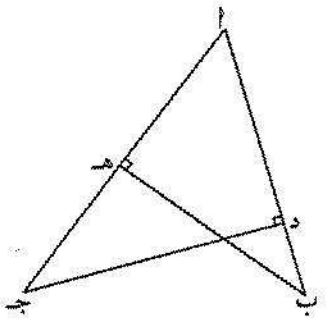
(ض.ز.ض)

٥ في الشكل المقابل : إذا كان س ن = س م ، ن ع = ص م ، $\overline{س ع} \perp \overline{س ص}$ ،
فأثبت أنّ Δ س ص م ≅ Δ س ع ن .



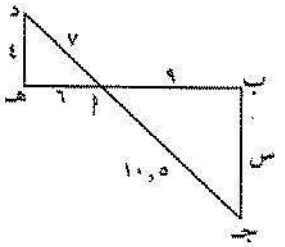
في Δ س ص م ، Δ س ع ن فيهما :
(١) ق(∠ س م ص) = ق(∠ س ع ن) = ٩٠° (معطى)
(٢) س ن = س م (معطى)
(٣) ص م = ن ع (معطى) ∴ Δ س ص م ≅ Δ س ع ن (∠ ، و ، ض)

٦ في الشكل المقابل : أثبت أنّ : Δ ا د جـ يشابه Δ ا هـ ب



(١) ق(∠ ا د جـ) = ق(∠ ا هـ ب) = ٩٠°
(٢) (∠ ا) مشتركة
∴ Δ ا د جـ ~ Δ ا هـ ب (نظرية (١))

٧ في الشكلِ المقابل :



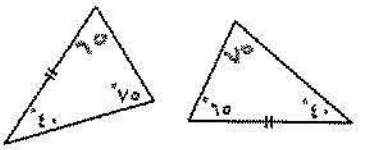
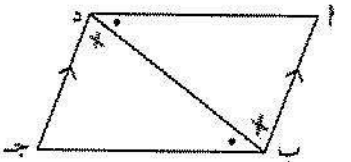
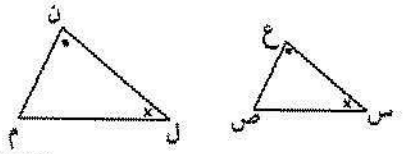
أ أثبت أنّ المثلّثين متشابهان .
$\frac{ا هـ}{ب هـ} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{ا د}{جـ د} = \frac{٧}{١٠,٥} = \frac{٢}{٣}$
ق(∠ ا هـ د) = ق(∠ ب هـ م) (بالتقابل بالرأس)
∴ Δ ا هـ د ~ Δ ب هـ جـ (نظرية (٢))

ب أوجِد قيمة س .
$\frac{ا هـ}{ب هـ} = \frac{٦}{٩} = \frac{٢}{٣}$
$\frac{د هـ}{ب جـ} = \frac{٤}{س} = \frac{٢}{٣}$ ∴ س = ٦

جـ أوجد محيط Δ ا ب جـ .
محيط Δ ا ب جـ = ٩ + ٦ + ١٠,٥ = ٢٥,٥

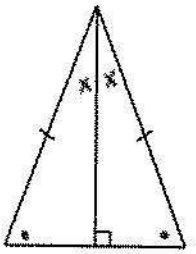
اختبار الوحدة الرابعة

أوّلًا : في البنود (١ – ٤) ظلِّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ يتشابه المثلّثان إذا تناسب طولا ضلعين في أحدهما مع نظائرهما في الآخر .	(أ)	(ب)
٢ المثلّثان في الشكل المقابِل متطابقان 	(أ)	(ب)
٣ في الشكل المقابِل : $\overline{أب} \cong \overline{جـد}$ 	(أ)	(ب)
٤ Δ س ص ع ، Δ ل م ن متشابهان 	(أ)	(ب)

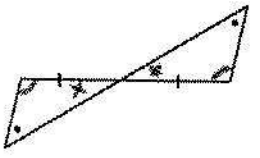
ثانيًا : لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات ، واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الدائرة الدالّة على الإجابة الصحيحة .

٥ في الشكل المقابِل : يتطابق المثلّثان وحالة تطابقهما هي :



(أ) (ض . ض . ض) فقط
(ب) (ض . ز . ض) فقط
(ج) (ز . ض . ز) فقط
(د) كل حالات التطابق

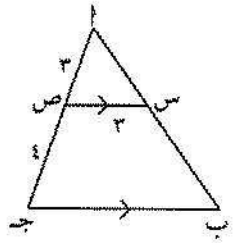
٦ في الشكل المقابِل : يتطابق المثلّثان وحالة تطابقهما هي :



(أ) (ض . ض . ض)
(ب) (ض . ز . ض)
(ج) (ز . ض . ز)
(د) (∠ . و . ض)

$\frac{٤}{٧} = \frac{٣}{ب جـ}$ $\frac{ص ع}{ب جـ} = \frac{٣}{٧}$ $\frac{٤ ص}{٤ هـ} = \frac{٣}{٧}$

(٧) إذا كان $\overline{س ص}$ // $\overline{ب جـ}$ فإنّ ب جـ يساوي :

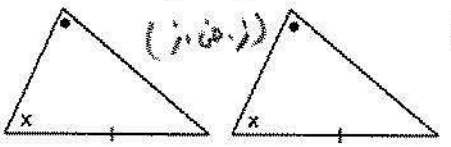


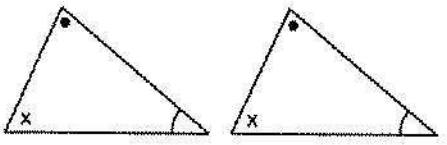
(أ) ٣ وحدة طول (ب) ٤ وحدة طول

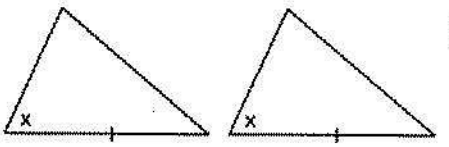
(جـ) ٧ وحدة طول (د) ١٢ وحدة طول

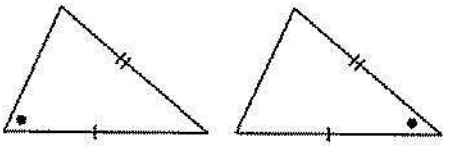
---

(٨) المثلّثان المتطابقان في ما يلي هما :

(أ)


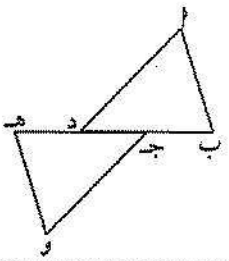
(ب)


(جـ)


(د)


---

(٩) في الشكل المقابل ، إذا كان Δ أ ب د ≅ Δ و هـ جـ فإنّ :



(أ) ب جـ = د هـ (ب) $(\hat{أ}) \cong (\hat{هـ})$

(جـ) ب جـ = جـ د (د) ق (أ $\hat{د}$ جـ) = ق (جـ $\hat{هـ}$ و)

---

(١٠) إذا كان قياسا زاويتين في أحد مثلّثين متشابهين هما ٣٢° ، ٥٤° فإنّ قياسي زاويتين في المثلّث الآخر هما :

١٨٠ − (٣٢ + ٥٤)

(أ) ٣٢° ، ٩٥° (ب) ٨٤° ، ٥٤°

(جـ) ٣٢° ، ٨٤° (د) ٩٤° ، ٥٤°

الوحدة الخامسة العلاقة والتطبيق
Relation and Mapping

عائلتي
My Family

مشروع الوحدة :
(شجرة العائلة)

الأسرة هي النواة الأساسية التي يتكوّن منها المجتمع ، وتتكوّن من مجموعة من الأفراد الذين يجمعهم روابط مشترَكة مثل : الرحم ، والدم ، والقرابة ، حيث تلعب دورًا كبيرًا وأساسيًّا في النشاط الاجتماعي في مختلف جوانبه ، وتحديدًا في الجوانب الاقتصادية ، والدينية ، والمادية والنفسية، وللأسرة واجبات متعدّدة منها : نقل اللغة للأجيال ، ونقل التراث ، كما أنّ لها وظائف مختلفة ومتنوّعة .

خطّة العمل :

- يكتب كل متعلم شجرة العائلة مع صلة القرابة .

ممكن أن تكون شجرة العائلة افتراضية .

خطوات تنفيذ المشروع :

- ابحث عن نموذج شجرة عائلة من النت أو صممها بنفسك .
- مثّل الشجرة بمخطط سهمي وآخر بمخطط بياني .
- ألصق شجرات العائلة لكل أفراد المجموعة بلوحة واحدة .

علاقات وتواصل :

- التعرف على شجرات العائلة لكل متعلم .

عرض العمل :

- يعرض المتعلم شجرة العائلة والتمثيلات (سهمي – بياني) لبقية أفراد المجموعة ولبقية المجموعات .

مخطَّط تنظيمي للوحدة الخامسة

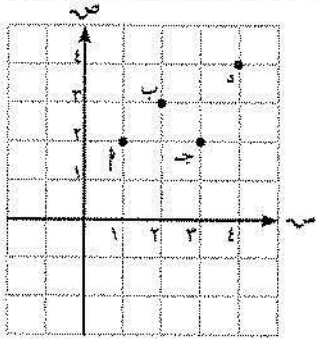
- العلاقة والتطبيق
  - الحاصل الديكارتي
    - مفهوم العلاقة
      - التطبيق

١-٥ الزوج المرتّب والحاصل الديكارتي
Ordered Pair – Cartesian Product

سوف تتعلّم : الزوج المرتّب والحاصل الديكارتي .

العبارات والمفردات :
زوج مرتّب
Ordered Pair
حاصل الضرب الديكارتي
Cartesian Product
مخطّط سهمي
Arrow Diagram
مخطّط بياني
Graph

نشاط (١) :



لاحِظ النظام الإحداثي أمامك ، ثمّ أجِب :

إحداثيًا كلّ من أ (١ ، ٢) ، ب (٢ ، ٣)

جـ (٣ ، ٢) ، د (٤ ، ٤)

لاحِظ ب ، جـ ، هل ترتيب الاحداثيات في هذه النقاط مهمّ هنا ؟ نعم

∴ نسمّي كلًّا من أ ، ب ، جـ ، د ، أزواجًا مرتّبة .

حيث الإحداثي الأوّل (الإحداثي السيني) يُسمّى المسقط الأوّل .
حيث الإحداثي الثاني (الإحداثي الصادي) يُسمّى المسقط الثاني .

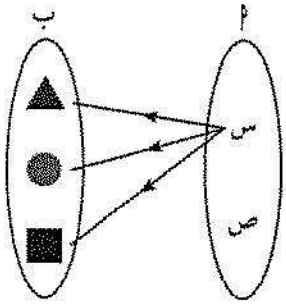
تذكّر أنّ !
المجموعة هي تجمّع من الأشياء معرّفة تعريفًا تامًّا ومتمايزًا .

متى يتساوى الزوجان المرتّبان (أ ، ب) ، (جـ ، د) ؟

إذا كان أ = جـ ، ب = د

نشاط (٢) :

أوجد كل الأزواج المرتبة الناتجة من ارتباط كل عنصر من أ بجميع عناصر ب مستعينًا بالمخطط السهمي.



الأزواج المرتبة هي :

(س ، ▲) ، (س ، ●)

(ص ، ■) ، (ص ، ▲)

(ص ، ●) ، (س ، ■)

تدرّب (١) :

لتكن س~ تمثل مجموعة الوالدين و ص~ تمثل مجموعة الأبناء ،

حيث س~ = { أمل ، صالح } ، ص~ = { نور ، عبدالله ، حسن }

أكمِل لتوجد كلّ الأزواج المرتّبة التي تربط مجموعة الوالدين بمجموعة الأبناء

{ (أمل ، نور) ، (أمل ، عبدالله) ، (أمل ، .....) ،

(صالح ، نور) (صالح ، عبدالله) ، (صالح ، .....) }

نسمّي هذه العناصر مجموعة الحاصل الديكارتي ونرمز إليه بالرمز س~ × ص~

الحاصل الديكارتي (أو حاصل الضرب الديكارتي) س~ × ص~ :

هو مجموعة كلّ الأزواج المرتّبة (أ ، ب) حيث المسقط الأوّل أ ∈ س~ ،

و المسقط الثاني ب ∈ ص~ .

أي أنّ : س~ × ص~ = { (أ ، ب) : أ ∈ س~ ، ب ∈ ص~ }

وعدد عناصر س~ × ص~ = عدد عناصر س~ × عدد عناصر ص~

مثال :

إذا كانت س~ = { ١ ، ٢ } ، ص~ = { ٣ ، ٤ ، ٥ } :

أ أوجد عدد عناصر س~ × ص~

ب أُكتب الحاصل الديكارتي س~ × ص~

جـ مثّل س~ × ص~ بمخطّط سهمي ومخطّط بياني

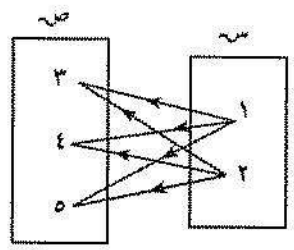
د أُكتب الحاصل الديكارتي ص~ × س~

الحلّ :

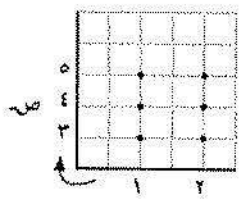
أ عدد عناصر س~ × ص~ = ٢ × ٣ = ٦

ب س~ × ص~ = { (١ ، ٣) ، (١ ، ٤) ، (١ ، ٥) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٢ ، ٥) }

جـ



مخطط سهمي



مخطط بياني

د ص~ × س~ = { (٣ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٤ ، ١) ، (٤ ، ٢) ، (٥ ، ١) ، (٥ ، ٢) }

فكر وناقش

في المثال السابق : هل س~ × ص~ = ص~ × س~ ؟ فسّر إجابتك .

تدرّب (٢) :

إذا كانت س = { ٢ ، ٣ ، ٤ } :

١ أوجد عدد عناصر س × س .

ب اكتب الحاصل الديكارتي س × س بذكر العناصر .

ج اكتب الحاصل الديكارتي س × س بذكر الصفة المميِّزة .

د مثِّل س × س بمخطَّط بياني وآخر سهمي .

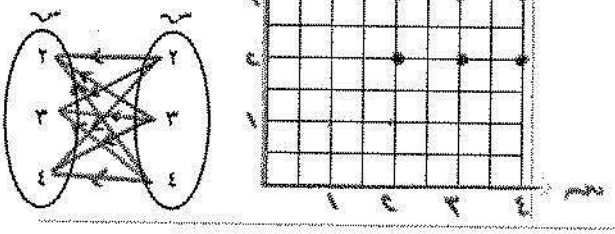
الحلّ :

١ عدد عناصر س × س = ٣ × ٣ = ٩

ب س × س = { (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٢) ،
(٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٢) ، (٤ ، ٣) ، (٤ ، ٤) }

ج الصفة المميِّزة س × س =
{ (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س }

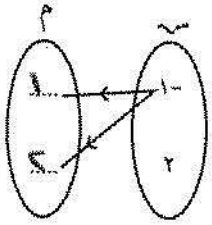
د



تدرّب (٣) :

إذا كانت س = { -١ ، ٢ } ، م = { ب : ب ∈ صـ ، ٠ < ب ≤ ٢ }

حيث صـ مجموعة الأعداد الصحيحة . أكمل ما يلي :



١ م = { ١ ، ٢ }

ب س × م = { (-١ ، ١) ، (-١ ، ٢) ، (٢ ، ١) ، (٢ ، ٢) }

ج المخطط سهمي س × م

د (-١ ، ٣) ∉ س × م

تدرّب (٤) :

إذا كانت س × صـ = { (أ ، ٣) ، (أ ، ٤) ، (ب ، ٣) ، (ب ، ٤) }.

أوجد س ، صـ بذكر العناصر . س = { أ ، ب }

صـ = { ٣ ، ٤ }

تمـــرَّنْ :

١ إذا كانت س = { ٣ ، ٦ ، ٩ } ، ص = { ٤ ، ٦ } ، فاكتب كلًّا من
س × ص ، ص × س ، ص × ص بذكر العناصر .

س × ص = { (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٦) ، (٦ ، ٤) ، (٦ ، ٦) ، (٩ ، ٤) ، (٩ ، ٦) }

ص × س = { (٤ ، ٣) ، (٦ ، ٣) ، (٤ ، ٦) ، (٦ ، ٦) ، (٤ ، ٩) ، (٦ ، ٩) }

ص × ص = { (٤ ، ٤) ، (٦ ، ٤) ، (٤ ، ٦) ، (٦ ، ٦) }

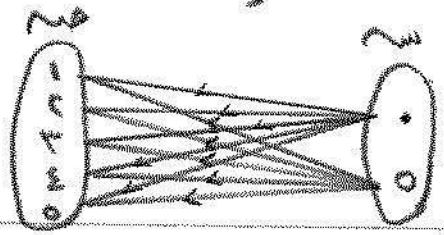
---

٢ إذا كانت س × ص = { (٠ ، ١) ، (٠ ، ٢) ، (٠ ، ٣) ، (٠ ، ٤) ، (٠ ، ٥) ، (١ ، ٥) ، (٢ ، ٥) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٥) } .

أ أُكتب كلًّا من س ، ص بذكر العناصر . س = { ٠ ، ٥ }

ص = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ }

ب مثِّل س × ص بمخطَّط سهمي .



---

٣ إذا كانت س = { أ : أ ∈ ط ، أ عدد فردي أصغر من ٦ } ، حيث ط مجموعة الأعداد الطبيعية ، ل = { ب : ب ∈ ص ، −٢ < ب ≤ ١ } ، حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة .

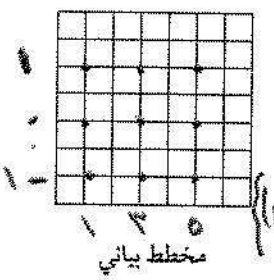
أ أُكتب كلًّا من س ، ل بذكر العناصر . س = { ١ ، ٣ ، ٥ }

ل = { −١ ، ٠ ، ١ }

ب أُكتب س × ل واذكر عدد عناصرها .

عدد العناصر = ٣ × ٣ = ٩

س × ل = { (١ ، −١) ، (١ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (٣ ، −١) ، (٣ ، ٠) ، (٣ ، ١) ، (٥ ، −١) ، (٥ ، ٠) ، (٥ ، ١) }



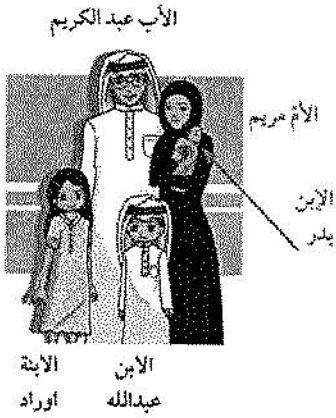
ج مثل بمخطط بياني س × ل .

٢-٥ مفهوم العلاقة
The Concept of Relation

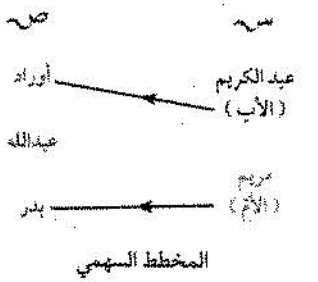
سوف تتعلّم : مفهوم العلاقة وكيفية إيجاد العلاقة بين مجموعة وأخرى .

نشاط :

تخرّج عبد الكريم من الجامعة وحصل على وظيفة مناسِبة ، ثم تزوّج ورزق بعائلة كما هو موضّح في المخطّط التالي :



إستعِن بالصورة التي أمامك لإكمال المخطط السهمي الذي يمثل س × ص .

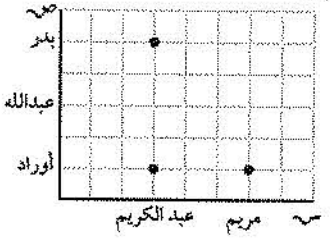


المخطط السهمي

إعتبِر ع١ هي علاقة « أب » ، ع٢ هي علاقة « أم » من س إلى ص ،
ثم أجب عن الأسئلة التالية :

١ أُكتب الحاصل الديكارتي س × ص ثمّ مثّله بيانيًا .

س × ص = { (عبد الكريم ، أوراد) ، (عبد الكريم ، عبد الله) ،
(عبد الكريم ، بدر) ، (مريم ، أوراد) ،
(مريم ، عبد الله) ، (مريم ، بدر) }



أكمِل التمثيل البياني س × ص المقابل .

٢ أُكتب جميع الأزواج المرتّبة التي تمثّل علاقة (أب)

ع١ = { (عبد الكريم ، أوراد) ، (عبد الكريم ، عبد الله) ، (عبد الكريم ، بدر) }

٣ أُكتب جميع الأزواج المرتّبة التي تمثّل علاقة (أم)

ع٢ = { (مريم ، أوراد) ، (مريم ، عبد الله) ، (مريم ، بدر) }

العبارات والمفردات :
علاقة من مجموعة إلى مجموعة أخرى
Relation from a Set to Another
علاقة على مجموعة
Relation on a Set

معلومات مفيدة :
يستخدم العلماء العلاقة بين عمق المحيط وضغط الماء على الجسم ، فكلّما زاد العمق زاد الضغط على الجسم . فجاذبية الأرض تجذب الماء إلى الأسفل ممّا يسبّب الضغط .

٤ من الصورة ، أُكتب جميع الأزواج المرتَّبة التي تمثّل علاقة (أطول من)

ع = { (عبد الكريم ، مريم) ، (عبد الكريم ، أوراد) ،
(عبد الكريم ، عبدالله) ، (عبد الكريم ، بدر) ، (مريم ، بدر) ،
(مريم ، أوراد) ، (مريم ، عبدالله) ، (أوراد ، عبدالله) ،
(أوراد ، بدر) ، (عبدالله ، بدر) }

٥ ١ هل ع$_1$ ⊆ س × ص ؟ نعم

ب هل ع$_2$ ⊆ س × ص ؟ نعم

لتكن س ، ص مجموعتين غير خاليتين تكون « ع » علاقة من س إلى ص عندما تكون « ع » مجموعة جزئية من الحاصل الديكارتي س × ص ونعبّر عن ذلك « ع » ⊆ س × ص

تدرّب (١) :

إذا كانت س = { ٣ ، ٥ } ، ص = مجموعة أرقام العدد ٢٢٣٤٤

١ أُكتب ص بذكر العناصر : ص = { ٢ ، ٣ ، ٤ }

ب أُكتب حاصل الضرب الديكارتي س × ص .

س × ص = { (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٥ ، ٢) ، (٥ ، ٣) ، (٥ ، ٤) }

ج أيًّا مما يلي يمثل علاقة من س إلى ص ؟

ع$_1$ = { (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٣) ، (٥ ، ٢) }

نعم

ع$_2$ = { (٣ ، ٤) ، (٣ ، ٣) ، (٢ ، ٣) ، (٤ ، ٥) }

لا

ع$_3$ = { (٣ ، ٢) ، (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٣) ، (٢ ، ٥) }

نعم

ع$_4$ = { (٣ ، ٣) }

نعم

ملاحظة :
عندما نقول إنّ ع علاقة ضعف يعني أنّ في كلّ زوج مرتّب المسقط الأوّل هو ضعف المسقط الثاني .

تذكّر أنّ :
الجذر التربيعي لعدد هو الجذر التربيعي للعدد الموجب أ هو العدد الذي مربّعه يساوي أ .

تدرّب (٢) :

فيما يلي مجموعة من العلاقات المعرَّفة على س = { ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } .

أُكتب كلّ علاقة بذكر عناصرها :

١ أُكتب ع١ علاقة « ضعف » من س إلى س بذكر العناصر :

حيث إنّ ٤ ضعف العدد ٢ ، ٦ ضعف العدد ٣

فإنّ ع١ = { (٤ ، ٢) ، (٦ ، ٣) }

ب ع٢ = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ + ب = ٨ }

{ (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٣) ، (٦ ، ٢) }

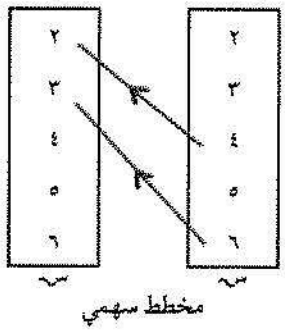
جـ ع٣ = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، ب = أ }

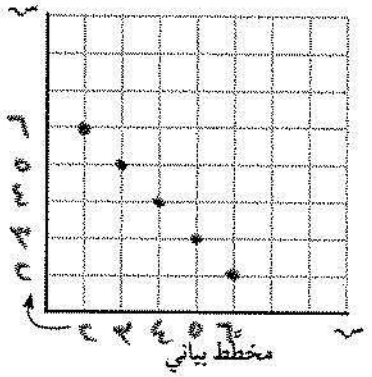
{ (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) ، (٦ ، ٦) }

د ع٤ = { (أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ = √ب }

{ (٤ ، ٢) }

هـ مثّل ع١ = بمخطّط سهمي وع٢ بمخطّط بياني :





فكر وناقش

من تدرب (٢) : اكتب علاقة معرفة على س .

تكون « ع » علاقة على س إذا كانت « ع » ⊆ س × س

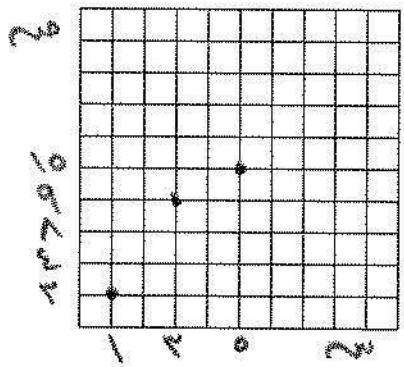
تدرّب (٣) :

ملاحظة مهمّة:
عندما نقول إنّ ع علاقة ثلث بمعنى أنّ في كلّ زوج مرتّب المسقط الأوّل هو ثلث المسقط الثاني .

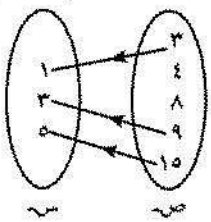
إذا كانت س = {١ ، ٣ ، ٥} ، ص = {٣ ، ٤ ، ٨ ، ٩ ، ١٥}
وكانت ع١ = {(أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ ص ، أ = $\frac{1}{3}$ ب} :

أ أُكتب ع١ بذكر العناصر : ع١ = {(١ ، ٣) ، (٣ ، ٩) ، (٥ ، ١٥)}

ب مثِّل ع١ بمخطَّط بياني .



ج أُكتب العلاقة ع٢ المبيَّنة في المخطَّط السهمي التالي بذكر العناصر ، والصفة المميِّزة .



ع٢ = {(١ ، ٣) ، (٣ ، ٩) ، (٥ ، ١٥)}

ع٢ = {(أ ، ب) : أ ∈ س ، ب ∈ ص ، أ = ٣ ب}

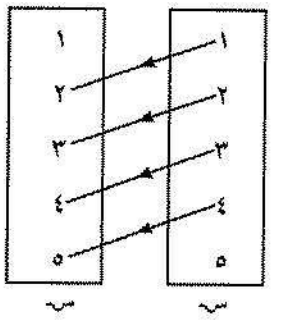
فكر وناقش

يرى أمير أن ع١ = ع٢ في تدرّب (٣) .
فهل رأي أمير صحيح أم خطأ ؟ فسّر ذلك.

تدرّب (٤) :

أُكتب العلاقة ع على سـ التي يمثّلها كلّ من المخطّطين السهمي والبياني المقابِلين ، ثمّ صِف العلاقة .

أ



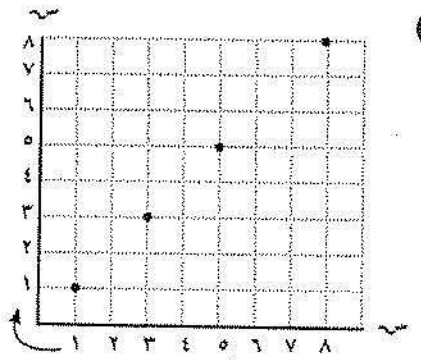
مخطط سهمي

ع = {(١ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (٣ ، ٤) ، (٤ ، ٥) ،

ومن المخطّط فإنّ العلاقة على ع

هي علاقة (يزيد بمقدار ..... ١ .....)

ب



مخطّط بياني

ع = {(١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٥ ، ٥) ، (٨ ، ٨) }

ومن المخطّط البياني فإنّ العلاقة على ع

هي علاقة ..... متعدية .....

تمـــرّنْ :

١ إذا كانت سـ = { أ ، ب ، جـ } ، صـ = { ٤ ، ٥ ، ٨ } ، فأيّ المجموعات التالية تمثّل علاقة من سـ إلى صـ ؟ مع ذكر السبب .

أ هـ = { (أ ، ٥) ، (أ ، ٤) ، (أ ، ٨) ، (ب ، ٤) }

علاقة لأن أ ، ب ∈ سـ ، ٤ ، ٥ ، ٨ ∈ صـ

ب ﻫ = { (أ ، ٥) ، (ب ، ٨) ، (ب ، ٤) ، (جـ ، ٣) ، (جـ ، ٥) }

ليست علاقة لأن ٣ ∉ صـ

جـ د = { (أ ، ٨) ، (أ ، ٥) ، (٨ ، جـ) ، (جـ ، ٨) }

ليست علاقة لأن ٨ ∈ سـ ، جـ ∉ صـ

٢ لتكن صـ = {١، ٢، ٣، ٤، ٦، ٩}

أ أُكتب ع علاقة من صـ إلى صـ بذكر العناصر حيث

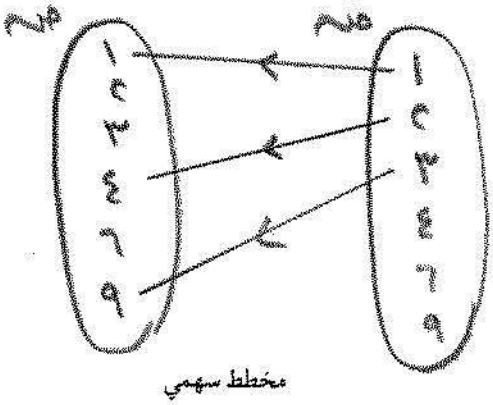
ع = {(أ، ب) : أ، ب ∈ صـ ، أ = ب}

ع = { (١،١) ، (٣،٣) ، (٤،٤) }

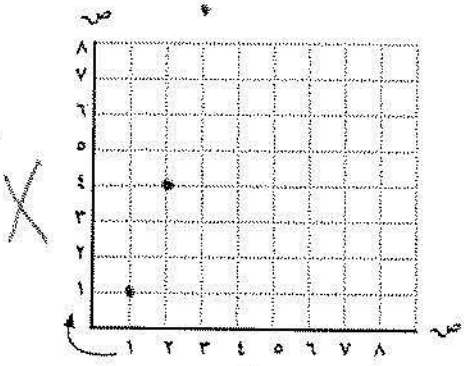
ب أوجد عدد عناصر صـ × صـ .

عدد العناصر = ٦ × ٦ = ٣٦

ج مثّل ع بمخطّط سهمي وبياني .



مخطط سهمي



مخطّط بياني

٣ فيما ما يلي مجموعة من العلاقات المعرَّفة من سـ إلى صـ ، حيث سـ = {٣، ٦، ٩} ، صـ = {٣، ٦، ٩، ١٢، ١٥} . أُكتب كلّ علاقة بذكر عناصرها .

أ هـ = {(أ، ب) : أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ ، أ < ب}

هـ = { (٣،٦) ، (٣،٩) ، (٦،٩) }

ب ل = {(أ، ب) : أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ ، ب = أ}

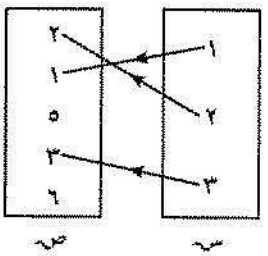
ل = { (٣،٣) ، (٦،٦) ، (٩،٩) }

ج ع = {(أ، ب) : أ ∈ سـ ، ب ∈ صـ ، ب = أ + ٦}

ع = { (٣،٩) ، (٦،١٢) ، (٩،١٥) }

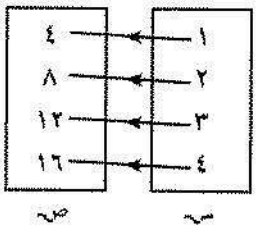
٤ أُكتب العلاقة ع على المجموعات التالية ، ثمّ صِف العلاقة .

أ



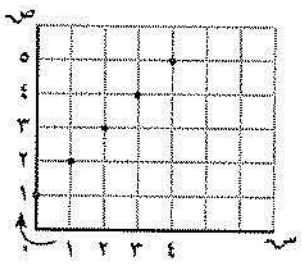
ع = {(١،١) ، (٢،٢) ، (٣،٣)}

ب



ع = {(١،٤) ، (٢،٨) ، (٣،١٢) ، (٤،١٦)}

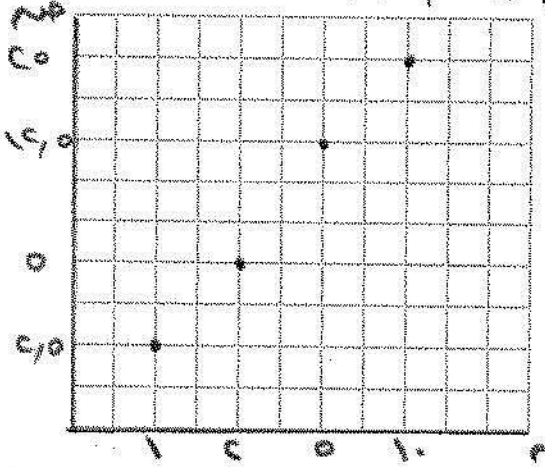
ج



ع = {(١،٤) ، (٢،٣) ، (٣،٢) ، (٤،١)}

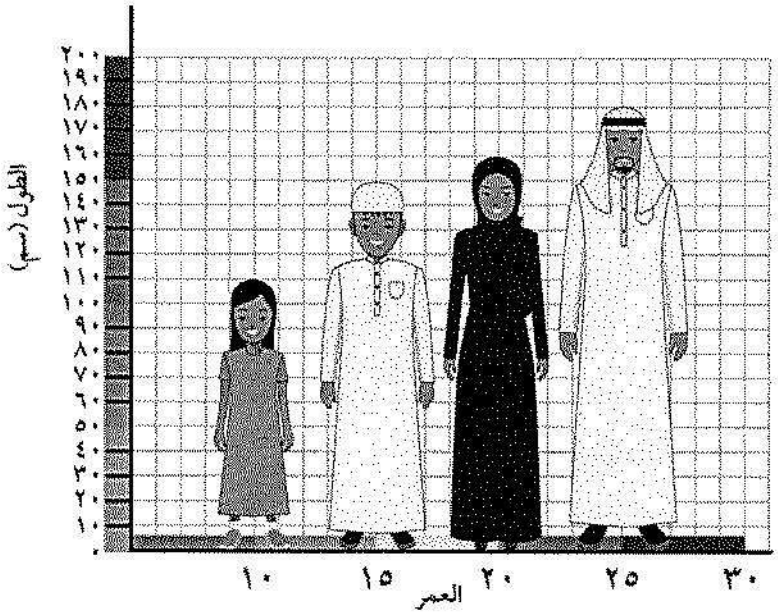
٥ اكتب العلاقة التالية كمجموعة أزواج مرتّبة ، ثمّ مثّلها بيانيًّا .

أسعار السمك	
الكتلة (كجم)	السعر (دينار)
١	٢,٥
٢	٥
٥	١٢,٥
١٠	٢٥



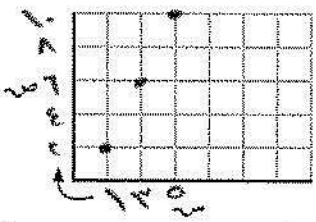
ع = {(١،٢,٥) ، (٢،٥) ، (٥،١٢,٥) ، (١٠،٢٥)}

٦ من المخطط البياني ، عبّر عن علاقة (العمر ، الطول) في عائلة عبد العزيز بصورة أزواج مرتبة .



ع = { (١٠ ، ١١٠) ، (١٥ ، ١٥٠) ، (٤٠ ، ١٦٠) ، (٤٥ ، ١٨٠) }

٧ إذا كانت س = { ١ ، ٣ ، ٥ } ، ص = { ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠ } ،
ع = { (ا ، ب) : ا ∈ س ، ب ∈ ص ، ا = $\frac{1}{2}$ ب } .



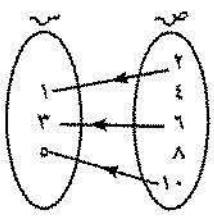
أ أكتب ع بذكر العناصر . ع = { (١ ، ٢) ، (٣ ، ٦) ، (٥ ، ١٠) }

ب مثّل ع بمخطط بياني .

جـ أكتب العلاقة ع$_{١}$ المبيّنة في المخطط السهمي التالي بذكر العناصر والصفة المميزة .

ع$_{١}$ = { (ا ، ب) ، ا ∈ س ، ب ∈ ص ، ا = $\frac{1}{2}$ ب }

ع$_{١}$ = { (١ ، ٢) ، (٣ ، ٦) ، (٥ ، ١٠) }



د هل ع = ع$_{١}$ ؟ لا

٣-٥ التطبيق (الدالّة)
Mapping

نشاط :

أمامك مجموعة من العلاقات بين مجموعتين س ، ص .

١

الصلوات الخمس	عدد الركعات
صلاة الفجر	١
صلاة الظهر	٢
صلاة العصر	٣
صلاة المغرب	٤
صلاة العشاء	

ع١

س ص

نلاحظ أنّ :
كلّ صلاة من الصلوات الخمس اليومية ترتبط بعدد مفروض من الركعات .

٢

الدولة	عاصمتها
الكويت	بيروت
لبنان	الكويت
السعودية	القاهرة
فرنسا	الرياض
	باريس

ع٢

س ص

نلاحظ أنّ :
كلّ دولة من المجموعة الأولى ترتبط بمدينة معيّنة من المجموعة الثانية وهي عاصمتها .

٣

طول ضلع المربّع	مساحته
١	١
٢	٤
٣	٩
٤	١٦
٥	٢٥

ع٣

س ص

نلاحظ أنّ :
أطوال أضلاع بعض المربّعات ترتبط بعدد هو مساحة كلّ منها .

من العلاقات في ١ ، ٢ ، ٣ نلاحظ أنّ :
كلّ عنصر من عناصر المجموعة الأولى يرتبط بعنصر واحد فقط من المجموعة الثانية .

التطبيق (الدالّة) : هي علاقة بين مجموعتين س ، ص بحيث يرتبط كلّ عنصر من عناصر المجموعة س بعنصر واحد وواحد فقط من عناصر المجموعة ص .

نرمز إلى التطبيق (الدالّة) بأحد الرموز :

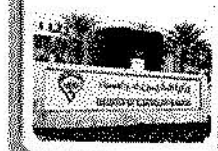
ت ، د ، هـ ، ق ، ...

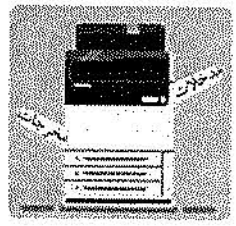
فإذا كانت ت تطبيق من المجموعة س إلى المجموعة ص ،

نرمز إلى ذلك ت : س ← ص

العبارات والمفردات :
الدالّة
Function
المجال
Domain
المجال المقابل
Codomain
المدى
Range

معلومات مفيدة :
يستخدم التقنيون في وزارة الطاقة التطبيق عند إصدار فاتورة إستهلاك الكهرباء حيث أن قيمة الإستهلاك والمبلغ المطلوب تمثل دالّة .





مكوّنات التطبيق (الدالّة) ت : سـ ⟵ صـ هي :

(١) المجموعة سـ تُسمّى مجال التطبيق (الدالّة) .

(٢) المجموعة صـ تُسمّى المجال المقابل للتطبيق ت .

(٣) قاعدة الاقتران ت .

إذا كان أ ∈ سـ والعنصر الذي يرتبط به من صـ هو ب ، فإنّنا نعبّر عن ذلك بالصورة ت (أ) = ب وهي قيمة التطبيق (الدالة) ت عند أ .

مدى التطبيق : هو مجموعة صور عناصر مجال التطبيق وهو مجموعة جزئية من المجال المقابل صـ .

مثال :

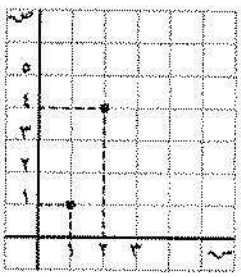
(١)

ع١ هي علاقة «مربّع العدد» من سـ إلى صـ حيث :

سـ = {١ ، ٢ ، ٣}

صـ = {١ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

وممثّلة بالشبكة البيانية .



نلاحظ أنّ :

٣ ∈ سـ ولم ترتبط بعنصر من صـ

∴ العلاقة ع١ ليست تطبيق .

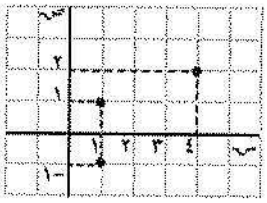
(٢)

ع٢ هي علاقة «الجذر التربيعي» من سـ إلى صـ حيث :

سـ = {١ ، ٤}

صـ = {-١ ، ٠ ، ١ ، ٢}

وممثّلة بالشبكة البيانية .



نلاحظ أن :

١ ∈ سـ وقد ارتبطت بالعنصرين ١ ، -١ من صـ

∴ العلاقة ع٢ ليست تطبيق .

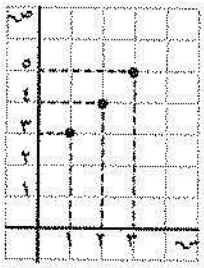
(٣)

ع٣ هي علاقة لها القاعدة «س + ٢» من سـ إلى صـ حيث :

سـ = {١ ، ٢ ، ٣}

صـ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

وممثّلة بالشبكة البيانية .



نلاحظ أن :

كل عنصر من عناصر سـ ارتبط بعنصر واحد فقط من صـ

∴ العلاقة ع٣ تطبيق .

في المثال السابق ع: تطبيق فإنّ :

المجال = س = {١ ، ٢ ، ٣}

المجال المقابل = ص = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

مدى التطبيق = {٣ ، ٤ ، ٥}

تُكتب ع كأزواج مرتّبة كالآتي : {(١ ، ٣) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٥)}

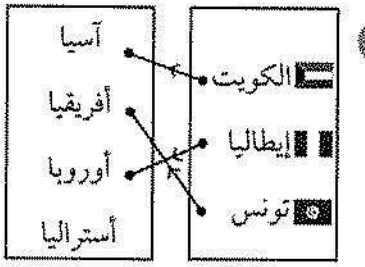
لاحظ أنّ : كلّ عنصر من س يظهر كمسقط أوّل مرّة واحدة فقط .

تدرّب (١) :

لتكن ع العلاقة التي تربط دولة ما بالقارّة التي تنتمي إليها .

ظلِّل (أ) إذا كانت العلاقة تطبيق أو (ب) إذا كانت العلاقة ليست تطبيقًا .

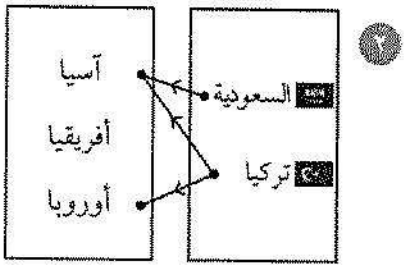
١



(أ) تطبيق (ب) ليس تطبيقًا

السبب .....

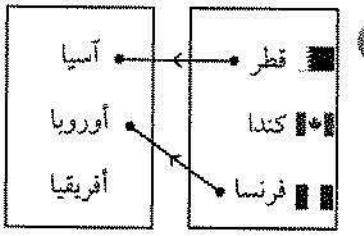
٢



(أ) تطبيق (ب) ليس تطبيقًا

السبب .....

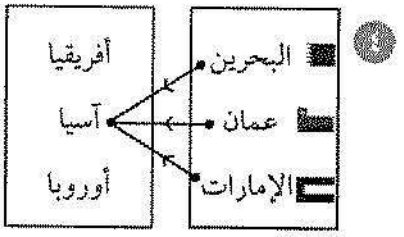
٣



(أ) تطبيق (ب) ليس تطبيقًا

السبب لأنه يوجد عنصر في المجال ليس له صورة في المجال المقابل

٤



(أ) تطبيق (ب) ليس تطبيقًا

السبب .....

في المخطط السهمي لبيان العلاقة من س إلى ص نلاحظ أن كل عنصر من س يخرج منه سهم واحد وواحد فقط إلى ص ، لتكون هذه العلاقة تطبيق (دالة) .

مثال (٤) :

إذا كانت س = { -١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص هي مجموعة الأعداد الصحيحة وكانت ق تطبيقًا معرّفًا كما يلي : ق : س ← ص حيث ق (س) = ٢ س - ٣

(أ) أوجد مدى هذه الدالّة بإكمال الجدول .

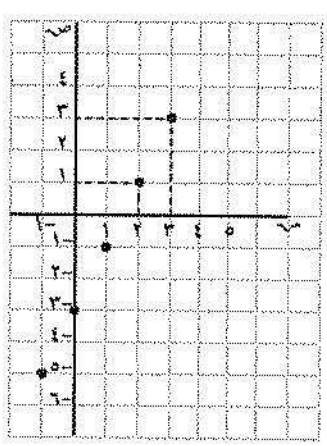
عناصر المجال	س	-١	٠	١	٢	٣
قاعدة الاقتران	٢ س - ٣	٢ × (-١) - ٣	٢ × ٠ - ٣	٢ × ١ - ٣	٢ × ٢ - ٣	٢ × ٣ - ٣
صور المجال المدى	ق (س)	-٥	-٣	-١	١	٣

مدى التطبيق = { -٥ ، -٣ ، -١ ، ١ ، ٣ }

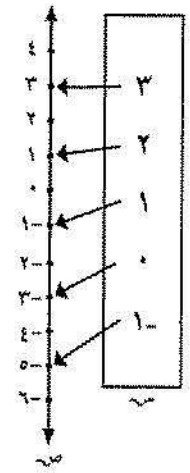
(ب) أُكتب ق كأزواج مرتّبة .

ق = { (-١ ، -٥) ، (٠ ، -٣) ، (١ ، -١) ، (٢ ، ١) ، (٣ ، ٣) }

(جـ) أرسم مخطّطًا سهميًّا للتطبيق ق ، وآخر بيانيًّا .



مخطّط بياني



مخطّط سهمي

فكر وناقش

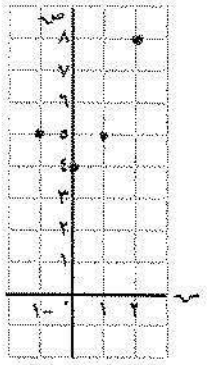
إذا كانت ت : ص ← ص حيث ت (س) = ٢

فإن المدى يساوي ٢ هل هذا صحيح ؟ فسر ذلك .

تدرّب (٢) :

إذا كانت س = { – ١ ، ٠ ، ١ ، ٢ } ، ص هي مجموعة الأعداد الصحيحة .

ت : س ← ص حيث ت (س) = س^{٢} + ٤



١ أكمِل الجدول التالي ، ثمّ أوجِد مدى التطبيق ت .

س	– ١	٠	١	٢
س^{٢} + ٤	(–١)^{٢} + ٤	٠^{٢} + ٤	١^{٢} + ٤	٢^{٢} + ٤
ت (س)	٥	٤	٥	٨

مدى التطبيق = { ٥ ، ٤ ، ٥ ، ٨ }

٢ أُكتب ت كأزواج مرتّبة .

ت = { (–١ ، ٥) ، (٠ ، ٤) ، (١ ، ٥) ، (٢ ، ٨) }

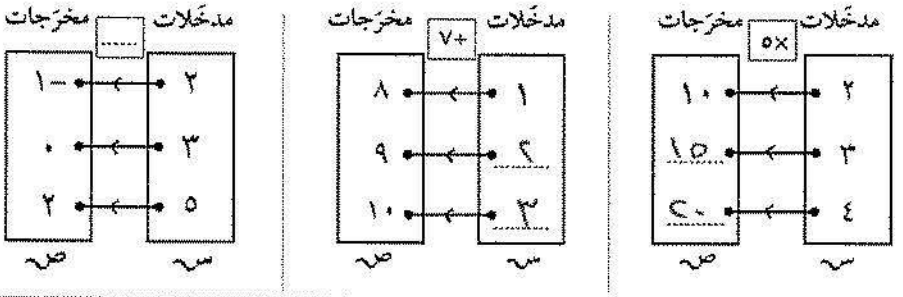
٣ أُرسم بيان التطبيق ت بالشبكة البيانيّة .

تدرّب (٣) :

أمامك عدد من العلاقات من س إلى ص .

أكمِل بحيث تعبّر هذه العلاقات عن تطبيق من س إلى ص ،

ثم اكتب قاعدة إقتران كل منها :



تمـــرّنْ :

١ إذا كانت س = { –١ ، ١ ، ٢ } ، ط هي مجموعة الأعداد الطبيعية ،

هـ هي تطبيق معرّف كما يلي : هـ : س ← ط حيث هـ (س) = س^{٢}

١ أكمل الجدول .

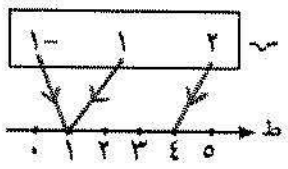
س	– ١	١	٢
س^{٢}	(–١)^{٢}	١^{٢}	(٢)^{٢}
هـ (س)	١	١	٤

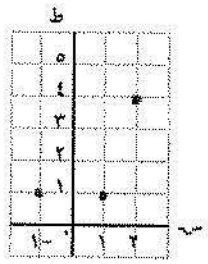
٢ مدى هـ = { ١ ، ٤ }

٣ أُكتب هـ كمجموعة من الأزواج المرتّبة .

هـ = { (–١ ، ١) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٤) }

٥ أُرسم مخطَّطًا سهميًّا ، وآخر بيانيًّا .

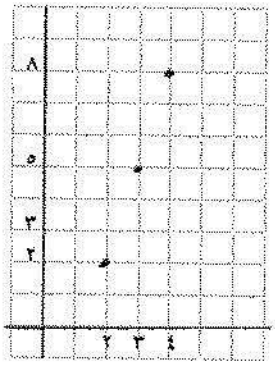




٦ إذا كانت س = {٢ ، ٣ ، ٤} ، ص = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٨}
وكانت ت تطبيق من س إلى ص حيث ت (س) = ٣ س - ٤ .

أ أكمل الجدول التالي .

س	٢	٣	٤
٣ س - ٤	٣ × ٢ - ٤	٣ × ٣ - ٤	٣ × ٤ - ٤
ت (س)	٢	٥	٨



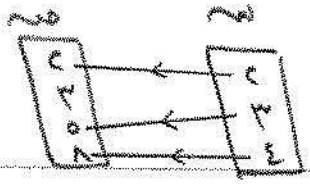
ب مدى ت = {٢ ، ٥ ، ٨}

جـ أُكتب ت كمجموعة من الأزواج المرتَّبة .

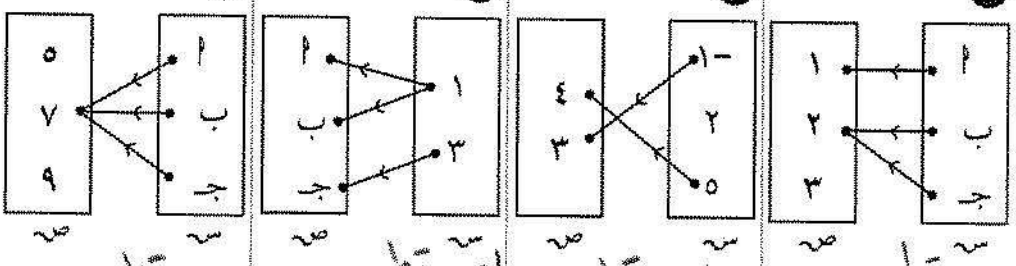
ت = {(٢ ، ٢) ، (٣ ، ٥) ، (٤ ، ٨)}

د أُرسم مخطَّطًا سهميًّا ، وآخر بيانيًّا

مخطط بياني



٧ بيِّن أيًّا من المخطَّطات السهمية التالية يمثِّل تطبيقًا ، واذكر السبب .
وإذا كان تطبيقًا فاذكر مجاله ومدى التطبيق .



١ إذا كانت ك = {أ : أ ∈ ص ، -٢ < أ < ١}
ل = {ب : ب ∈ ص ، -١ < ب < ٣}

أ أُكتب كلًّا من ك ، ل بذكر العناصر .

ك = { -١ ، ٠ ، ١ }

ل = { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ }

ب أُكتب ك × ل بذكر العناصر .

ك × ل = { (-١ ، ٠) ، (-١ ، ١) ، (-١ ، ٢) ، (٠ ، ٠) ، (٠ ، ١) ، (٠ ، ٢) }

٢ لتكن ع = {(أ ، ب) : أ ، ب ∈ ط ، س + ب = ٥}. أُكتب ع بذكر عناصرها .

ع = { (٤ ، ١) ، (٣ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (١ ، ٤) }

٣ أُكتب العلاقات التالية على س = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥} ،

ع١ = {(أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ = ½ ب}

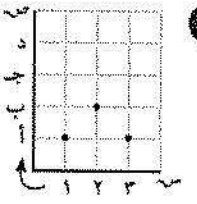
ع١ = { (٢ ، ١) ، (٤ ، ٢) }

ع٢ = {(أ ، ب) : أ ، ب ∈ س ، أ = ب}

ع٢ = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) ، (٥ ، ٥) }

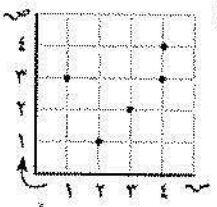
٤ أيّ من المخطّطات التالية تمثّل تطبيقًا ؟ ولماذا ؟

أ



تطبيق

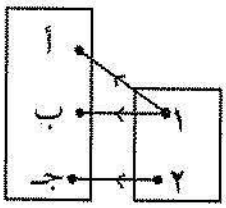
ب



ليس تطبيقا

لأن المدى ظهر له أكثر من صورة

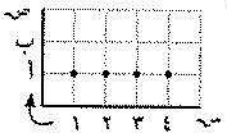
هـ



ليس تطبيقا

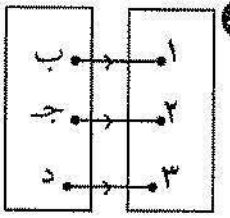
لأن العدد ١ ظهر لكنه أول مرتين

و



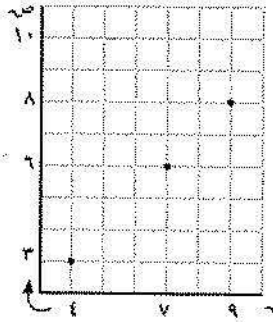
تطبيق

ز



تطبيق

ح استعِن بالمخطَّط البياني التالي ، ثمّ أجِب عمّا يلي :



١ أُكتب العلاقة ع ، ثمّ أعطِ وصفًا لهذه العلاقة .

ع = { (٣،٤) ، (٦،٧) ، (٨،٩) }

= { (أ،ب) : أ ∈ س ، ب ∈ ص ، ب = أ + ١ }

ب أُكتب الحاصل الديكارتي س × ص .

س × ص = { (٣،٤) ، (٦،٤) ، (٨،٤) ، (١٠،٤) ، (٣،٧) ، (٦،٧) ، (٨،٧) ، (١٠،٧) ، (٣،٩) ، (٦،٩) ، (٨،٩) ، (١٠،٩) }

ج هل العلاقة ع تمثّل تطبيقًا ؟ ولماذا ؟

نعم

ط إذا كانت س = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، ص = { ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٧ } وكانت ت تطبيق من س إلى ص حيث ت (س) = ٢س + ١

س	١	٢	٣
٢س+١	١+٢×٢	١+٢×٢	١+٣×٢
ت (س)	٣	٥	٧

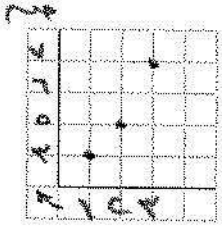
١ أكمل الجدول المقابل :

ب مدى ت = { ٣ ، ٥ ، ٧ }

ج اكتب ت كمجموعة من الأزواج المرتبة :

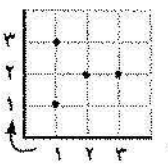
ت = { (١،٣) ، (٢،٥) ، (٣،٧) }

د ارسم مخطط سهمي ، ومخطط بياني للتطبيق .



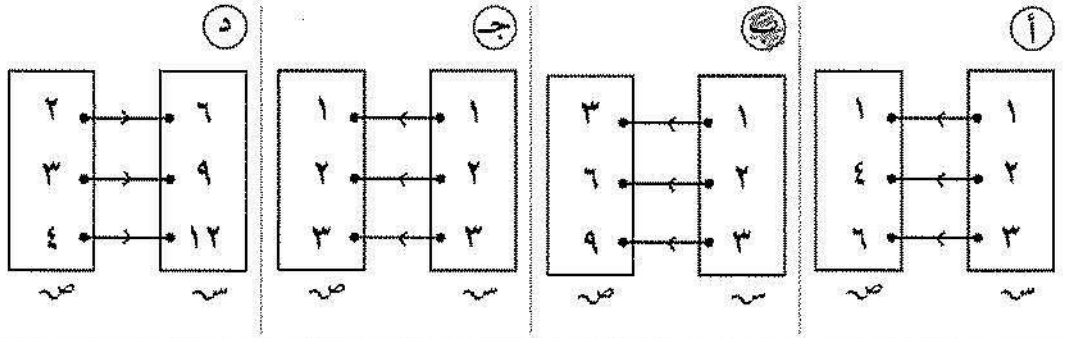
اختبار الوحدة الخامسة

أوّلًا : في البنود (١-٤) ظلِّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ لتكن سـ = { ٤ ، ٥ ، ٦ } فإنّ ع = { (٤ ، ٥) ، (٥ ، ٤) ، (٥ ، ٦) } لا تمثّل تطبيقًا .	(أ)	(ب)
٢ { أ ، ب } × { ٢ } = { (أ ، ٢) ، (ب ، ٢) }	(أ)	(ب)
٣ إذا كانت سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ } ، صـ = { ١ ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٩ } وكانت ع علاقة من سـ ← صـ حيث : ع = { (١ ، ١) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ٩) } فإنّ ع تمثّل علاقة «نصف»	(أ)	(ب)
٤ التمثيل البياني المقابل يمثل العلاقة ع = { (١ ، ١) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٢) } 	(أ)	(ب)

ثانيًا: لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الدائرة الدالّة على الاجابة الصحيحة .

٥ المخطّط السهمي الذي يمثّل علاقة « ثلث » من سـ ← صـ هو :



٦ إذا كانت ع دالّة من سـ إلى صـ حيث سـ = { ٢ ، ٤ ، ٥ } ، صـ = { ٦ ، ٧ }
وكانت ع = { (٢ ، ٦) ، (أ ، ٦) ، (٥ ، ٦) } فإنّ أ =

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

٧ إذا كانت سـ = { أ : أ ∈ صـ ، − ٢ < أ ≤ ٥ } ، حيث صـ هي مجموعة الأعداد الصحيحة ، فإنّ عدد عناصر سـ × سـ هو :

(أ) ٧ (ب) ٨ (جـ) ٧٢ (د) ٨٢

---

٨ مدى التطبيق ت : سـ ← سـ حيث ت (س) = ٧

(أ) { ٧ } (ب) سـ (جـ) ط (د) صـ

---

٩ إذا كانت سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } ، فإنّ (١ ، ٣) أحد الأزواج المرتبة في التطبيق ت (س) =

(أ) ٢س − ١ (ب) ٣س + ١ (جـ) س٢ + ١ (د) ٣س

---

١٠ الأزواج المرتّبة التي تمثّل تطبيقًا على سـ = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } هي :

(أ) { (١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٤) }

(ب) { (١ ، ٢) ، (٢ ، ٢) ، (٢ ، ٣) ، (١ ، ٣) }

(جـ) { (١ ، ١) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ٤) }

(د) { (١ ، ٢) ، (٣ ، ٤) }

الوحدة السادسة

علم الإحصاء
Statistics Science

السياحة
Tourism

مشروع الوحدة :
(ثقافة السفر)

السياحة تهدف إلى الترفيه (المرح) أو التطبيب أو الاكتشاف ، فهناك ارتباط واضح بين السياحة والمرح . والمرح أمر مهمّ في حياة الإنسان ، فهو يحفّز على العمل والإنجاز ويسهم في تحسين الحالة البدنية والنفسية ، وتتوجّه الدراسات التربوية الحديثة إلى أنّ ارتباط المرح في إستراتيجيات التعليم له أثر كبير في التعلّم وتثبيت المعلومات ، وتهيئة بيئة صفّية مناسِبة ومرحة للمتعلّمين .

خطة العمل :

- صمم جدولًا واختر أفضل تمثيل بياني لعرض إحصائيات السياحة لبعض الدول السياحية من اختيارك (كما في الجدول) .

عدد السياح لعام ٢٠١٨	
البلد	عدد السيّاح

خطوات تنفيذ المشروع :

- حدد الدول التي سوف تمثلها في الجدول أنت وأفراد المجموعة عن طريق النت لسنة محددة ولتكن سنة ٢٠١٨ .
- حدد الأماكن الأثرية والأكثر شهرة في الدول التي اخترتها مع صور ونبذة عن الدولة إن أمكن .
- حدد التمثيل البياني المفضل لعرض أي من بياناتك (عدد السياح، عدد الأماكن الأثرية) .

علاقات وتواصل :

- تواصل مع معلم الاجتماعيات للمساعدة .
- ناقش المجموعات حول أفضل معلومات للدول وأفضل تمثيل بياني .

عرض العمل :

- اعرض التمثيلات البيانية المنوعة والصور التي استخدمتها أمام المتعلمين وتحدث بنبذة عن الدول التي اخترتها .

مخطَّط تنظيمي للوحدة السادسة

- علم الإحصاء
  - التمثيل البياني بالقطاعات الدائرية
  - مخطَّط الساق والأوراق
  - المتوسّط الحسابي

٦-١ مخطّطات الساق والأوراق
Stem – and – Leaf Diagrams

سوف تتعلّم : صنع مخطّط الساق والأوراق ، و صنع مخطّط الساق والأوراق المزدوج .

العبارات والمفردات :
مخطّط الساق والأوراق
Stem - and -Leaf Diagram
مخطّط الساق والأوراق المزدوج
Double Stem - and -Leaf Diagram

نشاط :

يبيّن الجدول التالي نقاط التميّز للسياحة في دولتين لعدّة أشهر من السنة .
(درجة التميز هي ٥٠)

الشهر	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو
الدولة (أ)	٣٨	٢٦	٢٠	١٧	٤٧	٤٩
الدولة (ب)	٣٢	٤٥	١٣	٣٠	٢٢	٤٩

معلومات مفيدة:
يحتاج علماء الإحصاء إلى مخطط الساق والأوراق لترتيب البيانات .

١ أكمِل مخطّط الساق والأوراق لبيانات الدولة (أ) :

الأوراق	الساق
٧	١
٦ ...	...
٨	...
٧ ...	٤

ب أكمِل مخطّط الساق والأوراق لبيانات الدولة (ب) :

الأوراق	الساق
... ٣	١
... ٢	٢
... ٠	٣
... ٥ ٩	٤

جـ يمكن تمثيل الجدول بمخطّط ساق وأوراق واحد مزدوج بدمج جدول (أ) مع جدول (ب) كما يلي :

دولة (أ)		دولة (ب)
الأوراق	الساق	الأوراق
٧	١	٣
٠٦	٢	٢
٨	٣	٢٠
٧ ٩	٤	٩ ٥

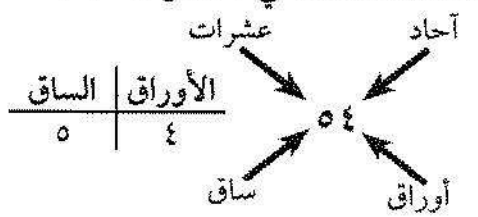
تقرأ ٤٩ — تقرأ ٤٧ — تقرأ ٤٥ — تقرأ ٤٩

تذكّرْ أنّ :
خطوات عرض البيانات لمخطّط الساق والأوراق:
١. أرسم خطّين متعامدين على شكل ┼ .
٢. أكتب الساق جهة اليسار والأوراق جهة اليمين.
٣. إذا كان العدد مكوّنًا من رقم واحد ، فاكتب جهة اليسار صفرًا .

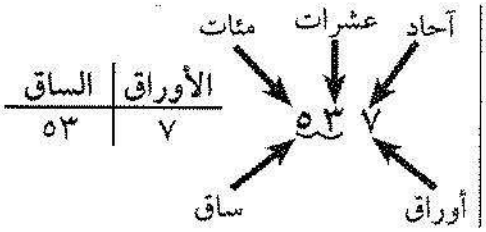
لاحظ أن :
- كلّ عدد من البيانات يُجزّأ إلى ساق وأوراق .
- إذا كان العدد مؤلّفًا من رقمين ، يكون رقم العشرات جهة الساق ورقم الآحاد جهة الأوراق .
- إذا كان العدد مؤلّفًا من ٣ أرقام ، يكون رقما العشرات والمئات جهة الساق ورقم الآحاد جهة الأوراق .
- عند وجود أعداد لها العشرات أو المئات نفسها تكتب آحادها في سطر واحد .

مثلاً :

الساق والأوراق في العددين ٥٤ ، ٥٣٧ .



الساق	الأوراق
٥	٤



الساق	الأوراق
٥٣	٧

تدرّب (١) :

اكمل مخطّط الساق والأوراق للبيانات الآتية :

٢٥٤ ، ٣٤٨ ، ٢٥٨ ، ٣٤٢ ،

١٣٦ ، ٣٤٩ ، ٢٧٦

الساق	الأوراق
١٣	٦
٢٥	٤ ٨
٢٧	٦
٣٤	٢ ٨ ٩

تدرّب (٢) :

يبين الجدول أدناه متوسّط درجة الحرارة المئوية اليومية لبعض أيّام شهر أبريل ، والتي تم رصدها خلال رحلة قام بها مبارك إلى المدينتين أ ، ب .

١ اصنع مخطط الساق و الأوراق المزدوج :

المدينة (أ)	١٢	٣٤	٢٣	١٨	٣٥	١٥	٢١	٣٤
المدينة (ب)	٣٠	٢٣	١٧	١٣	٣٢	٢١	١٤	٢٢

المدينة (أ)		المدينة (ب)
الأوراق	الساق	الأوراق
٨ ٥ ٤	١	٣ ٤ ٧
٣ ١	٢	١ ٤ ٣
٥ ٤ ٤	٣	٠ ٢

٢ أكمِل ما يلي :

- أدنى درجة حرارة في المدينة (أ) هي ١٢ .
- أعلى درجة حرارة في المدينة (أ) هي ٣٥ .
- أدنى درجة حرارة في المدينة (ب) هي ١٣ .
- أعلى درجة حرارة في المدينة (ب) هي ٣٤ .

تمـــرّنْ :

١ اِستخدِم مخطَّط الساق والأوراق التالي الذي يعطي أطوال بعض المتعلّمين بالسنتيمتر للإجابة عما يلي :

المجموعة (أ)		المجموعة (ب)
الأوراق	الساق	الأوراق
	١٣	٥٣
٠٣	١٤	٣
٥٨	١٥	٣٠
٣٣٥٨	١٦	٣٠
٣٨	١٧	٥٠
٠٣٥	١٨	

أ ما عدد المتعلّمين الذين يبلغ طولهم ١٦٣ سنتيمترًا في المجموعة (أ)؟ ٢

ب ما طول أقصر متعلّم في المجموعة (أ)؟ ١٤٠

وطول أقصر متعلّم في المجموعة (ب)؟ ١٣٣

جـ ما طول أطول متعلّم في المجموعة (ب) ؟ ١٧٥

---

٢ يبيِّن الجدول أدناه كمّية الأمطار (بالملّيمتر) التي هطلت على مدينتين (١) و (٢) في إحدى السنوات .

المدينة (١)	٦٨	٨٠	٨٥	٨٥	٨٨	٨٨
المدينة (٢)	٦٢	٦٠	٧٣	٧٨	٧٨	٨٣

اِصنع مخطَّط الساق والأوراق المزدوج لهذه البيانات .

المدينة (١)		المدينة (٢)
الأوراق	الساق	الأوراق
٨	٦	٢٠
	٧	٨٨٣
٠٥٥٨٨	٨	٣

٣ زار المدينة الترفيهية خلال ١٠ أيّام الأعداد التالية من الزوّار
٣٢٧ ، ٣٣٨ ، ٣٢٩ ، ٣١٧ ، ٣٢٢ ، ٣٣١ ، ٣١٢ ، ٣١٩ ، ٣٢٠
اِصنع مخطّط ساق وأوراق للبيانات السابقة .

الساق	الأوراق
٣١	٧ ٩
٣٢	٠ ٧ ٩
٣٣	١ ٨

---

٤ يظهر مخطّط الساق والأوراق المزدوج عدد دقائق التدريب اليوميّ لفريقين في لعبة كرة السلّة . أكمِل كلًّا ممّا يلي :

فريق (ب)		فريق (أ)
الأوراق	الساق	الأوراق
	٣	٤٥٧
٨	٤	١٢٩
٨٣	٥	١٦
٧٧٢	٦	٧
٩٥٣٠	٧	١

أ ما أكبر وقت لتدريب الفريقين ؟ ..... ٧٩ دقيقة .....

ب ما أصغر وقت لتدريب الفريقين ؟ ..... ٣٤ دقيقة .....

جـ ما عدد الدقائق الأكثر تكرارًا لتدريب الفريق (ب)؟ ..... ٦٧ دقيقة .....

٦-٢ تمثيل البيانات باستخدام القطاعات الدائرية
Represent the Data Using the Pie Charts

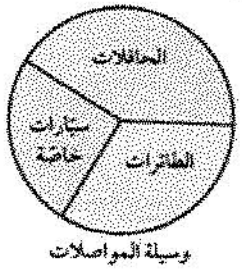
سوف تتعلّم : كيف تمثّل البيانات باستخدام القطاعات الدائرية .

العبارات والمفردات :
القطاعات الدائرية
Pie Charts

نشاط :

قام أحد الفنادق السياحية بحصر عدد الرحلات التي استقبلها ، وقد استخدم زائروه وسائل مواصلات مختلفة للوصول إليه ، فكانت وفق الجدول التالي والتمثيل البياني المرفق.

وسيلة المواصلات	الحافلات	سيّارات خاصّة	طائرات
عدد الرحلات	٧٥	٤٥	٦٠



وسيلة المواصلات

من التمثيل البياني المقابِل ، أجب عمّا يلي :

تذكّر أنّ :

قياس الدائرة ٣٦٠°

❶ ما اسم التمثيل البياني ؟

الدائرة

❷ أيّ وسائل مواصلات هي أكثر تفضيلًا لدى الزائرين ؟

الحافلات

❸ رتّب وسائل المواصلات من الأكثر تفضيلًا إلى الأقلّ تفضيلًا .

الحافلات - الطائرات - سيارات خاصة

تذكّر أنّ :

- تُستخدم القطاعات الدائرية لمقارنة أجزاء من البيانات بمجموعة البيانات كلّها .
- القطاع الدائري هو جزء من سطح الدائرة محدّد بنصفي قطر وقوس فيها .

و لمعرفة كيف تم تمثيل البيانات السابقة بالقطاعات الدائرية نستخدم التناسب التالي:

قياس الدائرة كلّها ° ٣٦٠ يساوي المجموع الكلّي للرحلات

زاوية رأس القطاع = مجموع الرحلات كلّها

= التكرار المقابِل لوسيلة المواصلات المطلوب تمثيلها

$$\frac{\text{زاوية رأس القطاع الدائري}}{\text{°٣٦٠}} = \frac{\text{التكرار المقابِل لكل وسيلة}}{\text{مجموع الرحلات كلها}}$$

هذا التناسب يؤدّي إلى القاعدة التالية :

(زاوية رأس كلّ قطاع = $\frac{\text{التكرار المقابل لكلّ قطاع}}{\text{مجموع التكرارات}} \times ٣٦٠^\circ$)

ثم نتبع الخطوات التالية لتمثيل البيانات :

الخطوة الأولى : أوجِد العدد الكلّي للرحلات (مجموع التكرارات)

= ٧٥ + ٤٥ + ٦٠ = ١٨٠

اللوازم :
- فرجار
- منقلة
- مسطرة

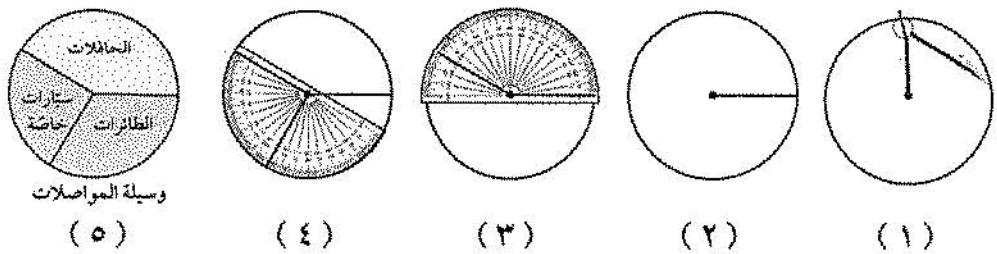
الخطوة الثانية : أوجِد قياس الزاوية التي تقابل كلّ وسيلة مواصلات لكل مما يلي:

أ قياس زاوية قطاع الحافلات = $\frac{٧٥}{١٨٠} \times ٣٦٠^\circ$ = ١٥٠°

ب قياس زاوية قطاع السيّارات الخاصّة = $\frac{٤٥}{١٨٠} \times ٣٦٠^\circ$ = ٩٠°

ج قياس زاوية قطاع الطائرات = $\frac{٦٠}{١٨٠} \times ٣٦٠^\circ$ = ١٢٠°

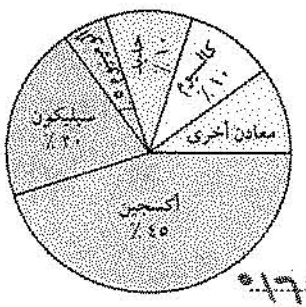
الخطوة الثالثة : ارسم دائرة أولًا ثم استخدم المنقلة لرسم القطاعات المناسِبة وسَمِّ كلّ قطاع ، ثمّ أعطِ التمثيل عنوانًا مناسِبًا .



(١) (٢) (٣) (٤) (٥)

تدرّب (١) :

يمثّل التمثيل البياني بالقطاعات الدائرية المقابل ، العناصر المكونة للتربة على سطح الأرض . أجب عما يلي:



أ النسبة المئوية للمعادن الأخرى = ١٠٪

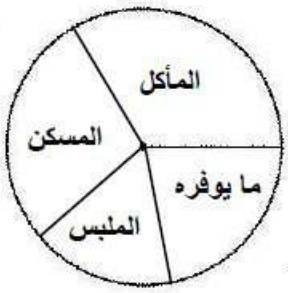
ب العنصر الأكثر تواجدًا في التربة هو = الأكسجين

ج قياس زاوية قطاع الأكسجين = $\frac{٤٥}{١٠٠} \times ٣٦٠^\circ$ = ١٦٢°

تدرّب (٢) :

ينفق موظّف راتبه الشهري كما يلي : ٣٠٠ دينارًا للمأكل ، ٢٥٠ دينارًا للمسكن ، ١٥٠ دينارًا للملبس ويوفّر ٢٠٠ دينار . أكمل ما يلي لتمثيل هذه البيانات بالقطاعات الدائرية .

الراتب الشهري = ٣٠٠ + ٢٥٠ + ١٥٠ + ٢٠٠ = ٩٠٠



زاوية رأس قطاع المأكل = $\frac{٣٠٠}{٩٠٠} \times ٣٦٠^\circ = ١٢٠^\circ$

زاوية رأس قطاع المسكن = $\frac{٢٥٠}{٩٠٠} \times ٣٦٠^\circ = ١٠٠^\circ$

زاوية رأس قطاع الملبس = $\frac{١٥٠}{٩٠٠} \times ٣٦٠^\circ = ٦٠^\circ$

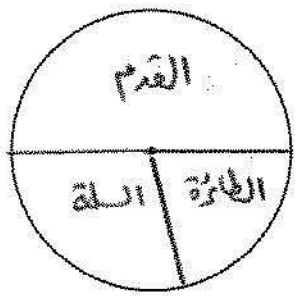
زاوية رأس قطاع ما يوفّره = $\frac{٢٠٠}{٩٠٠} \times ٣٦٠^\circ = ٨٠^\circ$

- اتبع الخطوة الثالثة من النشاط السابق لرسم القطاعات المناسبة .

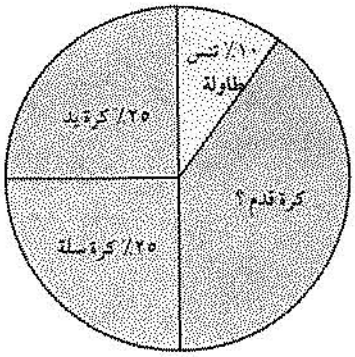
تدرّب (٣) :

الجدول التالي يمثل الرياضات المفضلة لدى متعلمي الصف الثامن و عددهم ٢٠٠ متعلم. أكمل الجدول ثم مثّل البيانات بالقطاعات الدائرية :

الرياضة المفضلة	كرة القدم	كرة السلة	الكرة الطائرة
النسبة المئوية	٥٠٪	٣٠٪	٢٠٪
زاوية رأسه	$\frac{٥٠}{١٠٠} \times ٣٦٠^\circ = ١٨٠^\circ$	$\frac{٣٠}{١٠٠} \times ٣٦٠^\circ = ١٠٨^\circ$	$\frac{٢٠}{١٠٠} \times ٣٦٠^\circ = ٧٢^\circ$



تمـــرَّنْ :



١ يوضّح التمثيل البياني بالقطاعات الدائرية المقابِل النسبة المئوية للّاعبين في ملاعب إحدى المدارس . إذا كان عددهم هو ٤٠٠ متعلّم ، فأوجِد كلًّا ممّا يلي :

أ النسبة المئوية للاعبي كرة القدم .

١٠٠ - (٢٥ + ٢٥ + ١٠) = ٤٠ ٪

ب عدد لاعبي كرة تنس الطاولة.

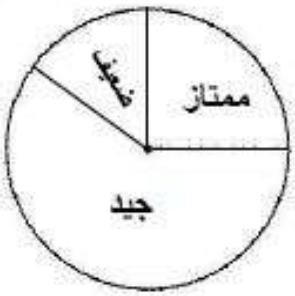
٤٠٠ × ١٠٠ = ٤٠ لاعب

جـ عدد لاعبي كرة السلّة .

٤٠٠ × ٢٥ = ١٠٠ لاعب

---

٢ الجدول التالي يبين مستويات النجاح في إحدى المدارس للصف الثامن وعدد المتعلمين لكل مستوى . أكمل الجدول ثم مثّل البيانات بالقطاعات الدائرية :



مستويات النجاح	عدد المتعلمين	قياس زاوية رأس القطاع
ممتاز	١٠٠	١٠٠/٤٠٠ × ٣٦٠ = ٩٠°
جيّد	٢٤٠	٢٤٠/٤٠٠ × ٣٦٠ = ٢١٦°
ضعيف	٦٠	٦٠/٤٠٠ × ٣٦٠ = ٥٤°
	٤٠٠	

---

٣ أكمل الجدول ثم مثّل البيانات التالية بالقطاعات الدائرية :

الرحلات السياحية		
الوجهة السياحية	النسبة المئوية	قياس زاوية رأس القطاع
آسيا	٢٥٪	٢٥/١٠٠ × ٣٦٠ = ٩٠°
أوروبا	٣٠٪	٣٠/١٠٠ × ٣٦٠ = ١٠٨°
دولة عربية	٤٥٪	٤٥/١٠٠ × ٣٦٠ = ١٦٢°

٦-٣ المتوسّط الحسابي – الوسيط – المنوال
The Mean – Median – Mode

سوف تتعلّم : كيفية تنظيم البيانات وإيجاد المتوسّط الحسابي والوسيط والمنوال .

العبارات والمفردات :
متوسّط حسابي Mean
وسيط Median
منوال Mode
قيم متطرّفة Outlier
مركز الفئة Center of an Interval

نشاط (١) :

البيانات التالية توضّح أعمار ١٥ متعلّمًا أعمارهم تتراوح بين (١٢ – ١٦) سنة للمشاركة في مسابقة لعبة كرة القدم .

أعمار ١٥ متعلمًا				
١٢	١٤	١٣	١٢	١٦
١٥	١٢	١٥	١٦	١٤
١٣	١٤	١٤	١٥	١٢

١ أكمل الجدول التكراري لهذه البيانات .

الأعمار	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦
علامات التكرار	١١١١	١١	١١١١	١١١	١١
التكرار	٤	٢	٤	٣	٢

معلومات مفيدة :
يحتاج علماء الإحصاء إلى المتوسّط الحسابي لإيجاد متوسّط دخل الفرد .

٢ أوجِد المتوسّط الحسابي من خلال الجدول السابق .

المتوسّط الحسابي = $\frac{(١٢ \times ٤) + (١٣ \times ٢) + (١٤ \times ٤) + (١٥ \times ٣) + (١٦ \times ٢)}{١٥}$

$= \frac{٢٠٧}{١٥} = ١٣,٨$

٣ رتِّب أعمار الـ ١٥ متعلّمًا ترتيبًا تصاعديًّا ، ثمّ أوجِد الوسيط .

١٢ ، ١٢ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٤ ، ١٤ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٥ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٦ ، ١٦

الوسيط هو ١٤

٤ أكثر البيانات تكرارًا من الجدول السابق هو ١٤ و ١٤ ويُسمّى المنوال

تذكّر أنّ :
المقاييس التي تصف البيانات هي :
(١) المتوسّط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$
(٢) الوسيط هو القيمة الوسطى لمجموعة البيانات بعد ترتيبها .
(٣) المنوال هو أكثر القيم تكرارًا .

تدرّب (١) :

نظِّم مجموعة البيانات التالية في جدول تكراري ، ثمّ أوجِد المتوسّط الحسابي والوسيط والمنوال .

٩ ، ٩ ، ٧ ، ٨ ، ٦ ، ٧ ، ٥ ، ٨ ، ٦ ، ٦ ، ٩ ، ٧ ، ٤

٩،٩،٩،٨،٨،٧،٧،٧،٦،٦،٦،٥،٤

١ أكمِل :

القيمة	٤	٥	٦	٧	٨	٩
التكرار	١	١	٣	٣	٢	٣

ب المتوسّط الحسابي = $\frac{(٤\times١)+(٥\times١)+(٦\times٣)+(٧\times٣)+(٨\times٢)+(٩/٣)}{١٣}$

$= \frac{٩١}{١٣} = ٧$

جـ الوسيط هو ٧

د المنوال هو ٦ ، ٧ ، ٩

تذكَّرْ أنّ :
٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨
وسيط البيانات السابقة هو $\frac{٤+٦}{٢} = ٥$

٥٧ ، ٥٩ ، ٦٠ ، ٦٠ ، ٦١ ، ٦٣ ، ٦٤ ، ٦٥ ، ٦٧ ، ٢٠٤ ، ٦٠ ، ٦٤

تدرّب (٢) :

جاءت أوزان عدد من الأشخاص بالكيلوجرام (كجم) كما يلي :
٦٥ ، ٥٧ ، ٥٩ ، ٦١ ، ٢٠٤ ، ٦٧ ، ٦٤ ، ٦٠ ، ٦٠ ، ٦٣

اللوازم :
- آلة حاسبة

١ أوجِد المتوسّط الحسابي والوسيط والمنوال لهذه الأوزان .

المتوسّط الحسابي = $\frac{٦٥+٥٧+٥٩+٦١+٢٠٤+٦٧+٦٤+٦٠+٦٠+٦٣}{١٠}$

$= \frac{٧٦٠}{١٠} = ٧٦$

الوسيط = $\frac{٦١+٦٣}{٢} = \frac{١٢٤}{٢} = ٦٢$

المنوال هو ٦٠

ب هل توجَد قيمة بعيدة عن البيانات ؟ نعم ، ما هي ؟ ٢٠٤

تُسمّى القيم البعيدة عن معظم مجموعة البيانات بـ القيمة المتطرّفة .

جـ أوجِد المتوسّط الحسابي والوسيط والمنوال للأوزان السابقة من دون القيمة المتطرّفة .

٥٧ ، ٥٩ ، ٦٠ ، ٦٠ ، ٦١ ، ٦٣ ، ٦٤ ، ٦٥ ، ٦٧

المتوسّط الحسابي = $\frac{٥٥٦}{٩} = ٦١,٧٨$

الوسيط = ٦١

المنوال هو ٦٠

فكّر وناقش

من تدرب (٢) السابق ، ما تأثير القيم المتطرّفة على المتوسّط الحسابي والوسيط لمجموعة البيانات ؟

تذكَّرْ أنّ :
(١) المدى =
أكبر قيمة – أصغر قيمة
(٢) طول الفئة =
الحد الأعلى للفئة –
الحد الأدنى للفئة .

نشاط (٢) :

بلغت أطوال قامات متعلّمي أحد فصول رياض الأطفال بالسنتيمتر كما هو موضَّح في الجدول التكراري ذي الفئات المقابل :

جدول تكراري ذو فئات	
الفئات	التكرار
٦٥ –	٦
٧٥ –	٧
٨٥ –	٣
٩٥ –	٣
١٠٥ –	١

مركز الفئة هو المتوسّط الحسابي لطرفيها .

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة} + \text{الحد الأعلى للفئة}}{٢}$$

أ أوجِد مراكز الفئات ، ثمّ أكمِل الجدول .

مركز الفئة (٦٥ –) $= \frac{٦٥ + ٧٥}{٢} =$ ٧٠

مركز الفئة (٧٥ –) $= \frac{٧٥ + ٨٥}{٢} =$ ٨٠

مركز الفئة (٨٥ –) $= \frac{٨٥ + ٩٥}{٢} =$ ٩٠

مركز الفئة (٩٥ –) $= \frac{٩٥ + ١٠٥}{٢} =$ ١٠٠

مركز الفئة (١٠٥ –) $= \frac{١٠٥ + ١١٥}{٢} =$ ١١٠

الفئات	التكرار (ت)	مركز الفئة (م)	(ت) × (م)
٦٥ –	٦	٧٠	٦ × ٧٠ = ٤٢٠
٧٥ –	٧	٨٠	٧ × ٨٠ = ٥٦٠
٨٥ –	٣	٩٠	٣ × ٩٠ = ٢٧٠
٩٥ –	٣	١٠٠	٣ × ١٠٠ = ٣٠٠
١٠٥ –	١	١١٠	١ × ١١٠ = ١١٠
	المجموع = ٢٠		المجموع = ١٦٦٠

ب أوجِد المتوسّط الحسابي للبيانات السابقة مستخدِمًا مراكز الفئات .

$$\text{المتوسّط الحسابي} = \frac{\text{مجموع (التكرار} \times \text{مركز الفئة)}}{\text{مجموع التكرارات}} = \frac{\text{مجموع (ت} \times \text{م)}}{\text{مجموع (ت)}}$$

$$= \frac{١٦٦٠}{٢٠}$$

$$= ٨٣$$

تدرّب (٣) :

من خلال البيانات التالية :

١٧ ، ١٨ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٩ ، ٢٠ ، ١٨ ، ١٥ ، ١١ ، ٢٤ ، ٢٦ ، ٢٩ ، ٣٠ ،
١٠ ، ١٤ ، ١٦ ، ١٢ ، ١٤ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٧ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٨ ، ٢٠ ،
٢٩ ، ١٥ ، ١٤ ، ٢٨

أ أكمِل الجدول التكراريّ التالي :

الفئات	علامات العدّ	التكرار (ت)	مركز الفئة (م)	(ت) × (م)
١٠ –	𝍸 𝍸	١٠	$١٣ = \frac{١٦ + ١٠}{٢}$	١٣٠ = ١٣ × ١٠
١٦ –	𝍸 𝍸	١٠	١٩	١٩٠
٢٢ –	𝍸	٥	٢٥	١٢٥
٢٨ –	𝍸	٥	٣١	١٥٥
		المجموع = ٣٠		المجموع = ٦٠٠

ب أوجِد المتوسط الحسابي لهذه البيانات مستخدِمًا مراكز الفئات .

المتوسّط الحسابي = $\frac{٦٠٠}{٣٠}$ = ٢٠

تدرّب (٤) :

لدينا مخطّط الساق والأوراق المزدوج لمجموعتين من البيانات أ ، ب .

الأوراق (أ)	الساق	الأوراق (ب)
٢	٥	١
٧٨٨	٦	٥٤
٣	٧	٣٣٢

أ ما منوال البيانات (أ) ؟ ٦٨

والبيانات (ب) ؟ ٧٣

ب ما وسيط البيانات (أ) ؟ ٦٨

والبيانات (ب) ؟ $\frac{٦٥+٧٤}{٢} = \frac{١٣٩}{٢} = ٦٩,٥$

جـ أوجد المتوسّط الحسابي لبيانات (أ).

$= \frac{٥٢ + ٦٧ + (٢ \times ٦٨) + ٧٣}{٥} = \frac{٣٢٨}{٥} = ٦٥,٦$

تمـــرّنْ :

١ نال متعلّمو الصفّ الثامن في أحد الاختبارات الدرجات التالية

(الدرجة النهائية للاختبار من ٢٠) :

١٣ ، ١٥ ، ١٥ ، ١٩ ، ١٥ ، ١٠ ، ١٧ ، ١٩ ، ١٠ ، ١٥ ،

١٧ ، ١٨ ، ١١ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٨ ، ١٧ ، ١٤ ، ١١

أوجد المتوسّط الحسابي والوسيط والمنوال للبيانات السابقة .

القيمة	١٠	١١	١٣	١٤	١٥	١٧	١٨	١٩
التكرار	٢	٢	٢	٢	٥	٣	٢	٢

١٩

٢٠ ٢٢ ٢٦ ٢٨ ٧٥ ٨١ ٣٦ ١٩

المتوسط الحسابي $= \frac{٢٧٧}{١٩} = ١٤,٥٨$

الوسيط = ١٥ المنوال = ١٥

٢ في أحد الأعوام كان عدد رحلات ناقلات البترول لإحدى شركات النفط خلال ٩ أشهر هو :

٩ ، ١٧ ، ١٥ ، ٩ ، ٨ ، ١٢ ، ١٣ ، ٨٩ ، ٨

عيّن القيمة المتطرّفة واحسب المتوسّط الحسابي والوسيط والمنوال لمجموعة البيانات دون القيمة المتطرّفة .

القيمة المتطرفة هي ٨٩

المتوسط الحسابي $= \frac{٨+٨+٩+١٢+١٣+٨٩+٩+١٥+١٧}{٨} = \frac{٩١}{٨} = ١١,٣٧٥$

الوسيط $= \frac{٩+١٢}{٢} = \frac{٢١}{٢} = ١٠,٥$

المنوال هو ٨ و ٩

٣ إستخدِم مخطَّط الساق والأوراق للإجابة عن الأسئلة التالية :

الأوراق (أ)	الساق	الأوراق (ب)
٠٢	١٦	٠
١٣٤	١٧	٢١
٢٢٣	١٨	٣٣٣
٤٤	١٩	٠

أ ما منوال البيانات (أ) ومنوال البيانات (ب) ؟

منوال (أ) = ١٨٣ منوال (ب) = ١٨٣

ب أوجِد الوسيط للبيانات (أ) والوسيط للبيانات (ب) .

وسيط (أ) = $\frac{١٧٤ + ١٨٢}{٢}$ = ١٧٨ وسيط (ب) = ١٨٣

ج أوجِد المتوسّط الحسابي للبيانات (ب) .

المتوسط الحسابي = (١٦٠ + ١٧١ + ١٧٤ + ١٨٣ + ١٨٣ + ١٨٣ + ١٩٠) ÷ ٧ = ١٧٧,٤٣

أعداد كبيرة ← حد آلة

٤ في إحدى دورات الألعاب الأولمبية بلغت نتائج الوثب الطويل بالسنتيمتر ما يلي : ٨٦٢ ، ٨٥٣ ، ٨٤٤ ، ٨٢٩ ، ٨٣٥ ، ٨٢٤ ، ٨٦٢ ، ٨٣٧ ، ٨٢٧ ، ٨٤٧ ، ٨٥٢ ، ٨٤٩ ، ٨٥٠ ، ٨٤٣ ، ٨٣٣ ، ٨٣٤ ، ٨٥٢ ، ٨٢٤ ، ٨٣٢ .

أ أوجِد المدى لهذه البيانات .

المدى = ٨٦٢ − ٨٢٠ = ٤٢

ب أكمل الجدول التكراري التالي : ٢٢

الفئات	علامات العدّ	التكرار (ت)	مركز الفئة (م)	(ت) × (م)
٨٢٠ –	|||	٥	٨٢٥	٤١٢٥
٨٣٠ –	||||	٤	٨٣٥	٣٣٤٠
٨٤٠ –	||||	٤	٨٤٥	٣٣٨٠
٨٥٠ –	||||	٤	٨٥٥	٣٤٢٠
٨٦٠ –	||	٢	٨٦٥	١٧٣٠
المجموع =		المجموع = ١٩		المجموع = ١٥٩٩٥

ج أوجِد المتوسّط الحسابي لهذه البيانات مستخدمًا مراكز الفئات .

المتوسط الحسابي = $\frac{١٥٩٩٥}{١٩}$ = ٨٤١,٨٤

٦-٤ مراجعة الوحدة السادسة
Revision Unit Six

❶ في مقارنة بين أطوال قامات متعلّمي الصفّين الثامن والتاسع في إحدى المدارس تبيّن ما يلي :

أطوال قامات متعلّمي الصفّ التاسع :

١٧٠ ، ١٦٩ ، ١٦٨ ، ١٦٦ ، ١٦٩ ، ١٧١ ، ١٧٢

أطوال قامات متعلّمي الصفّ الثامن :

١٦٦ ، ١٥٩ ، ١٧٠ ، ١٧١ ، ١٥٩ ، ١٥٨ ، ١٦٠

أ مثّل البيانات السابقة باستخدام مخطّط الساق والأوراق المزدوج .

أوراق (التاسع)	الساق	أوراق (الثامن)
	١٥	٨ ٩ ٩
٦ ٨ ٩ ٩	١٦	٠ ٦
٠ ١ ٢	١٧	٠ ١

ب أكمِل الجدول التالي مستخدمًا مخطّط الساق والأوراق المزدوج .

	الصفّ الثامن	الصفّ التاسع
المتوسّط الحسابي	١٦٣,٥٩	١٦٩,٥٩
الوسيط	١٦٠	١٦٩
المنوال	١٥٩	١٦٩
المدى	١٧١ - ١٥٨ = ١٣	١٧٤ - ١٦٦ = ٦

❷ في إحدى الدورات الأولمبية حقّق فريق السيّدات النتائج التالية في الوثب العالي بالسنتيمتر :
٢٠٤ ، ٢٠٣ ، ٢٠١ ، ١٩٩ ، ١٩٧ ، ١٨٥ ، ١٨٧ ، ١٨٨ ، ٢٠٢ ، ٢٠٤ ، ١٩٤ ،
١٩٥ ، ١٩٧ ، ١٩٣ ، ١٨٦ ، ١٨٤ ، ١٨٣ ، ١٩٢ ، ١٩١ ، ١٨٠ ، ٢٠٠

أ أوجِد المدى لهذه البيانات .

المدى = ٢٠٤ − ١٨٠ = ٢٤

ب أكمل الجدول التكراري التالي :

الفئة	العلامات	التكرار (ت)	مركز الفئة (م)	(ت) × (م)
١٨٠ –	||||	٤	١٨٣	٧٣٢
١٨٦ –	||||	٤	١٨٩	٧٥٦
١٩٢ –	|||| ||||	٦	١٩٥	١١٧٠
١٩٨ –	||||	٥	٢٠١	١٠٠٥
٢٠٤ –	||	٢	٢٠٧	٤١٤
		المجموع = ٢١		المجموع = ٤٠٧٧

ج إستخدِم مراكز الفئات لإيجاد المتوسّط الحسابي .

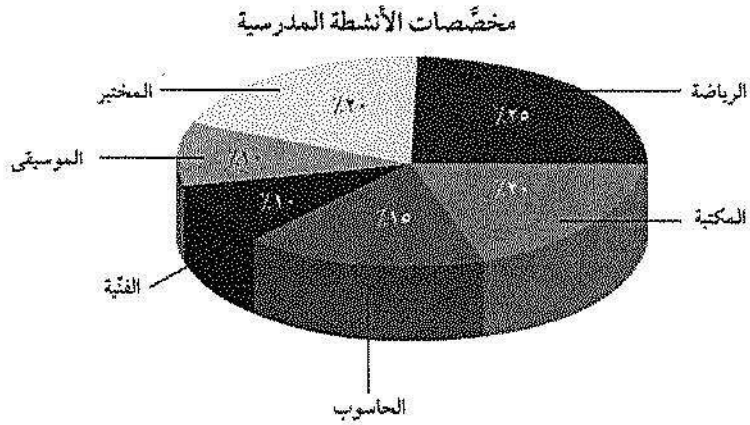
المتوسط الحسابي = ٤٠٧٧ / ٢١ = ١٩٤٫١٤

❸ يُبيّن الجدول المقابل توزيع متعلّمي إحدى المدارس الابتدائية على فصولها الخمسة .
مثّل البيانات بالقطاعات الدائرية .

توزيع متعلّمي المدرسة	
الصفّ	النسبة المئوية
الأوّل	٪٢٥
الثاني	٪٢٥
الثالث	٪٢٠
الرابع	٪١٥
الخامس	٪١٥

قياس الزاوية
٢٥/١٠٠ × ٣٦٠° = ٩٠°
٩٠°
٧٢°
٥٤°
٥٤°

٤ يبيّن التمثيل بالقطاعات الدائرية أدناه توزيع مخصّصات إحدى المدارس في عام ٢٠١٢ م على الأنشطة المدرسية المختلفة . إستعمِل ذلك في الإجابة عن الأسئلة التي تليه .



أ ما النشاط الذي له أكبر حصّة من المخصّصات ؟

الرياضة

ب ما الأنشطة التي لها حصص متساوية من المخصّصات ؟

المكتبة والمختبر الفنية والموسيقى

ج ما الكسر الذي يدلّ على مخصّصات النشاط الرياضي ؟

$\frac{1}{4}$

د إذا كانت المخصّصات للنشاطات في هذا العام ٨٠٠٠ د . ك ، فما حصّة كلّ نشاط من النشاطات الآتية :

(١) الحاسوب

$\frac{15}{100} \times 8000 =$

١٢٠٠ د.ك

(٢) الموسيقى

$\frac{10}{100} \times 8000 =$

٨٠٠ د.ك

(٣) المختبر

$\frac{20}{100} \times 8000 =$

١٦٠٠ د.ك

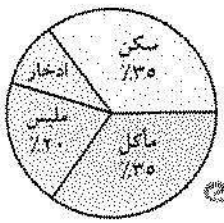
هـ بكم تزيد مخصّصات المكتبة على الحاسوب ؟

٪٣٠ - ٪١٥ = ٪١٥

١٦٠٠ - ١٢٠٠ = ٤٠٠ د.ك

اختبار الوحدة السادسة

أوّلًا : في البنود (١-٤) ظلِّل (أ) إذا كانت العبارة صحيحة ، وظلِّل (ب) إذا كانت العبارة غير صحيحة .

١ في مخطَّط الساق والأوراق المقابِل ، المنوال هو ٢٣ .	الأوراق | الساق ٠٢٣٤ | ١ ٢٢٤٥ | ٣	(أ)
٢ في التمثيل البياني بالقطاعات المقابِل : إذا كان الدخل الشهري للأسرة هو ٢٠٠٠ دينار ، فإنّ ما تدّخره الأسرة شهريًّا هو ٢٠٠ دينار .		(ب)
٣ إذا كانت مجموعة من البيانات مكوَّنة من ٤ قيم ، والمتوسّط الحسابي لهذه القيم هو ٢٨ ، فإنّ مجموع هذه القيم يساوي ٧ .		(أ)

ثانيًا: لكلّ بند من البنود التالية أربعة اختيارات واحد فقط منها صحيح ، ظلِّل الدائرة الدالّة على الإجابات الصحيحة :

٤ أيّ ممّا يلي ليس متوسّطًا حسابيًّا ولا وسيطًا ولا منوالًا لمجموعة البيانات التالية :

٠ ، ٢ ، ٤ ، ٤ ، ٦ ، ٦ ، ٧ ، ٧ ، ٧ ، ٧

(أ) ٧ (ب) ٥ (جـ) ٥٠ (د) ٦

٥ المدى لمجموعة البيانات التالية : ١٩ ، ٩٠ ، ٩٢ ، ٩٤ ، ٩٤ هو :

(أ) ٩٢ (ب) ٧٥ (جـ) ٩٤ (د) ١١٣

٦ الوسيط لمجموعة القيم : ٣ ، ٦ ، ٢ ، ٩ ، ٤ هو :

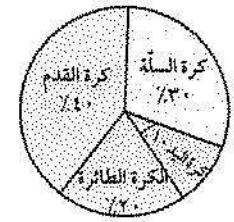
(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٣

٧ في الجدول المقابل ، إنّ التمثيل البياني بالقطاعات الدائرية المناسب في ما يلي هو :

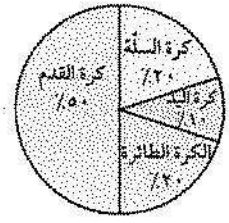
الرياضة	كرة اليد	كرة السلّة	كرة القدم	الكرة الطائرة
العدد	١٨٠	١٢٠	٢٤٠	٦٠

٦٠٠

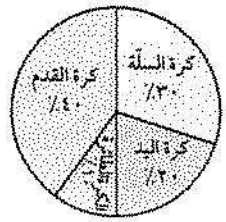
(أ) الرياضة المفضّلة



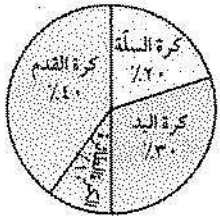
(ب) الرياضة المفضّلة



(جـ) الرياضة المفضّلة



(د) الرياضة المفضّلة

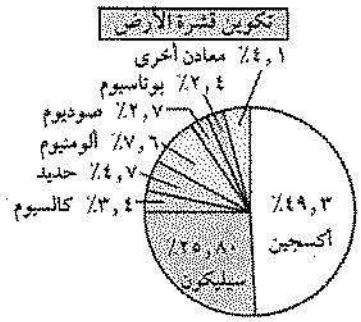


٨ العدد الذي يمثّل الساق ٨ والورقة ٧ هو :

(أ) ٨٧ (ب) ٧٨ (جـ) ٨٨ (د) ٨٠٧

٩ في التمثيل البياني المقابل ، إنّ النسبة المئوية لقطاع السيليكون وقطاع الأكسجين بالنسبة إلى تكوين قشرة الأرض هي :

٧٥,١ = ٢٥,٨ + ٤٩,٣



(أ) ٥٣,٤٪ (ب) ٨,٨٪ (جـ) ٢٩,٨٪ (د) ٧٥,١٪

١٠ في التمثيل المقابل ، إنّ أعلى كمّية دهون من بين أنواع الفطائر هي :

(أ) ٦٣ (ب) ٣٦ (جـ) ٥٩ (د) ١٩

كمّية الدهون بالجرام في فطائر اللحم والدجاج

أوراق (لحم)	الساق	أوراق (دجاج)
	٠	٨
٠٥٩	١	٩٨٥٥٣٣
٠٦	٢	٠
٠٣٦	٣	